

MODUL AJAR

INFORMASI UMUM

A. Identitas Modul

Nama Penyusun	: Detiana,S.Si.,M.Pd
Institusi	: SMA Negeri 3 Banda Aceh
Mata Pelajaran/Kelas	: Matematika/XI (Fase F)
Topik	: Matriks
Tahun Pelajaran	: 2022/2023
Alokasi Waktu	: 12 x 35 Menit (3 x pertemuan)

B. Kompetensi Awal

Pengetahuan dan/atau keterampilan yang perlu dimiliki sebelum mempelajari topik Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers, antara lain:

- Peserta didik memahami hakikat ilmu Matematika
- Peserta didik mampu penyajian data dalam bentuk tabel.
- Peserta didik mengetahui ordo matriks
- Peserta didik dapat menyelesaikan operasi matriks

C. Profil Pelajar Pancasila

Profil pelajar Pancasila yang diharapkan berkembang melalui kegiatan pembelajaran ini antara lain:

- Beriman dan bertakwa kepada Tuhan YME serta berakhlak mulia
- Mandiri
- Bergotong-royong

D. Sarana dan Prasarana

- Tersedia perpustakaan sekolah
- Tersedia buku bacaan yang relevan
- Tersedia jaringan internet
- Tersedia laptop dan infokus

E. Target Peserta Didik

Peserta didik yang menjadi target, yaitu peserta didik reguler/tipikal: umum, tidak ada kesulitan dalam mencerna dan memahami materi ajar.

F. Model Pembelajaran

Model pembelajaran *discovery learning* dengan pendekatan saintifik secara tatap muka

KOMPONEN INTI**A. Tujuan Pembelajaran**

11.4 Mengetahui istilah matriks

11.5 Mengetahui jenis-jenis matriks

11.6 Mengenal tranfos matriks

11.7 Menentukan penjumlahan matriks

11.8 Menentukan pengurangan matriks

11.9 Menentukan perkalian matriks

11.10 Menurunkan sifat-sifat operasi matriks persegi melalui contoh

11.11 Menentukan determinan matriks 2×2 dan 3×3

11.12 Menentukan invers matriks 2×2 dan 3×3

11.13 Menentukan persamaan matriks dari sistem persamaan linier.

11.14 Menyelesaikan SPLDV dan SPLTV dengan matriks invers.

B. Pemahaman Bermakna

Dengan mempelajari matriks diharapkan siswa memahami istilah matriks dan penggunaan matriks, menyelesaikan berbagai permasalahan linear, transformasi linear yakni bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi, memecahkan masalah operasi penyelidikan, misalnya masalah operasi penyelidikan sumber-sumber minyak bumi dan sebagainya.

C. Pertanyaan Pemantik

Untuk menumbuhkan rasa ingin tahu dan kemampuan berpikir kritis dalam diri peserta didik, maka ditanyakan:

- Apakah kamu pernah melihat barisan dan kolom?
- Pernah tau klasemen sepak bola?
- Kipet HP? Posisi angka di kipet HP!
- Apakah dalam kehidupan sehari-hari kamu mengetahui contoh matrik? Sebutkan!
- Bagaimana membedakan ukuran sebuah matrik?

D. Kegiatan Pembelajaran Pertama

Kegiatan Pendahuluan

Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu
<ul style="list-style-type: none"> • Membuka pelajaran dan memberi salam • Mengkondisikan kelas untuk belajar diawali dengan membaca Alquran dan berdoa • Memulai PBM dengan mengajukan pertanyaan yang berhubungan dengan kondisi dan absensi. • Mengajukan pertanyaan pemantik sebagai apersepsi untuk mendorong rasa ingin tahu dan berpikir kritis. • Menyampaikan informasi kompetensi, garis besar cakupan materi, tujuan, manfaat, dan langkah pembelajaran yang akan dilaksanakan peserta didik 	<ul style="list-style-type: none"> • Membalas salam • Membaca Alquran dan berdoa • Merespon pertanyaan • Menjawab secara bergiliran dengan berbagai macam kemungkinan jawaban • Menyimak penjelasan 	15 menit

Kegiatan Inti

Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu
<p><u>Memberi Stimulus</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Menunjukkan gambar-gambar berkaitan matriks dalam kehidupan sehari-hari 	<ul style="list-style-type: none"> • Memperhatikan gambar yang ditampilkan 	5 menit

Klasemen Sementara Hasil Euro 2016 di Prancis								
GRUPA	Negara	M	M	S	K	SG	POINT	
1	Prancis	2	2	0	0	4	1	6
2	Swiss	2	1	1	0	2	1	4
3	Rumania	2	0	1	1	2	3	1
4	Albania	2	0	0	2	0	3	0

Mengidentifikasi masalah

- Informasi/permasalahan berkaitan dengan gambar-gambar yang disajikan

Mengumpulkan data

- Mengintruksikan peserta didik masuk dalam kelompok masing-masing
- Mengintruksikan peserta didik secara berkelompok mencari bahan referensi dari buku referensi maupun internet untuk dapat menjawab LKPD tentang matrik dalam kehidupan sehari-hari
- Memantau aktivitas peserta didik

Mengolah data

- Mengintruksikan setiap peserta didik untuk berdiskusi dengan kelompoknya dan menuliskan hasil pada LKPD.
- Memantau aktivitas peserta didik

Memverifikasi

- Mengintruksikan setiap kelompok untuk mempresentasikan hasil yang diperoleh

- Menyampaikan pendapat secara bergilir mengenai gambar-gambar yang ditampilkan

5 menit

- Menggali informasi dari berbagai sumber untuk menjawab LKPD
- Berdiskusi untuk menyatukan ide, pendapat, dan informasi yang diperoleh dari berbagai sumber

5 menit

- Merancang mind map integrasi/penerapan ilmu matematika dalam berbagai bidang kehidupan

60 menit

- Mempresentasikan hasil diskusi dan menanggapi pertanyaan dari kelompok lain

20 menit

<p>Menyimpulkan</p> <ul style="list-style-type: none"> Mengintruksikan peserta didik membuat kesimpulan bersama tentang Matematika dalam kehidupan sehari-hari 	<ul style="list-style-type: none"> Menarik kesimpulan 	5 menit
Kegiatan Penutup		
<ul style="list-style-type: none"> Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang istilah matrik Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang penambahan, pengurangan dan perkalian matrik Peserta didik mengungkapkan manfaat matrik dalam kehidupan sehari-hari. Peserta didik dapat mengidentifikasi matrik yang bisa dioperasikan Menginformasikan bahwa pertemuan selanjutnya akan melanjutkan pembahasan tentang determinan matriks dan invers matriks. Melakukan asesmen formatif Memberi salam 		20 menit
E. Asesmen		
Jenis Asesmen	Bentuk Asesmen	
<ul style="list-style-type: none"> Asesmen sebelum pembelajaran (diagnostik) Asesmen selama proses pembelajaran (formatif) Asesmen pada akhir proses pembelajaran (sumatif). 	<ul style="list-style-type: none"> Wawancara Tes tulis Sikap (profil pelajar pancasila) berupa: lembar observasi, penilaian diri, penilaian teman sebaya, dan anekdot Performa, berupa presentasi dan pameran hasil karya (mind map, poster dan video) Tes tulis, berupa soal pilihan ganda Tes tulis 	

F. Pengayaan dan Remedial

Remedial

- Pembelajaran remedial dilakukan bagi peserta didik yang capaian pembelajarannya belum tuntas
- Tahapan pembelajaran remedial dilaksanakan melalui remedial *teaching* (klasikal), atau tutor sebaya, atau tugas dan diakhiri dengan tes.
- Tes remedial, dilakukan sebanyak 3 kali dan apabila setelah 3 kali tes remedial belum mencapai ketuntasan, maka remedial dilakukan dalam bentuk tugas tanpa tes tertulis kembali.

Pengayaan

- Bagi peserta didik yang sudah mencapai nilai ketuntasan diberikan pembelajaran pengayaan sebagai berikut:
 - Peserta didik yang mencapai nilai $n(\text{ketuntasan}) < n < n(\text{maksimum})$ diberikan materi masih dalam cakupan kompetensi dengan pendalaman sebagai pengetahuan tambahan
 - Peserta didik yang mencapai nilai $n > n(\text{maksimum})$ diberikan materi melebihi cakupan kompetensi dengan pendalaman sebagai pengetahuan tambahan.

G. Kegiatan Pembelajaran Kedua

Kegiatan Pendahuluan

Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu
<ul style="list-style-type: none"> • Membuka pelajaran dan memberi salam • Mengkondisikan kelas untuk belajar diawali dengan membaca Alquran dan berdoa • Memulai PBM dengan mengajukan pertanyaan yang berhubungan dengan kondisi dan absensi. • Mengajukan pertanyaan persepsi untuk mendorong rasa ingin tahu dan berpikir kritis. • Menyampaikan informasi kompetensi, garis besar cakupan materi, tujuan, manfaat, dan langkah pembelajaran yang akan 	<ul style="list-style-type: none"> • Membalas salam • Membaca Alquran dan berdoa • Merespon pertanyaan • Menjawab secara bergiliran dengan berbagai macam kemungkinan jawaban • Menyimak penjelasan 	15 menit

dilaksanakan peserta didik		
Kegiatan Inti		
Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu
<p><u>Memberi Stimulus</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Guru memberi permasalahan tentang matriks atau determinan 	<ul style="list-style-type: none"> Memperhatikan masalah yang disajikan 	5 menit
<p><u>Mengidentifikasi masalah</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Informasi/permasalahan berkaitan dengan masalah yang disajikan 	<ul style="list-style-type: none"> Menyampaikan pendapat secara bergilir mengenai masalah yang disajikan 	5 menit
<p><u>Mengumpulkan data</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Mengintruksikan peserta didik masuk dalam kelompok masing-masing Mengintruksikan peserta didik secara berkelompok mencari bahan referensi dari buku referensi maupun internet untuk dapat menjawab LKPD tentang matrik dalam kehidupan sehari-hari Memantau aktivitas peserta didik 	<ul style="list-style-type: none"> Menggali informasi dari berbagai sumber untuk menjawab LKPD Berdiskusi untuk menyatukan ide, pendapat, dan informasi yang diperoleh dari berbagai sumber 	5 menit
<p><u>Mengolah data</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Mengintruksikan setiap peserta didik untuk berdiskusi dengan kelompoknya dan menuliskan hasil pada LKPD. Memantau aktivitas peserta didik 	<ul style="list-style-type: none"> Merancang mind map integrasi/penerapan ilmu matematika dalam berbagai bidang kehidupan 	60 menit
<p><u>Memverifikasi</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Mengintruksikan setiap kelompok untuk mempresentasikan hasil yang diperoleh 	<ul style="list-style-type: none"> Mempresentasikan hasil diskusi dan menanggapi pertanyaan dari kelompok lain 	20 menit

Menyimpulkan	<ul style="list-style-type: none"> Mengintruksikan peserta didik membuat kesimpulan bersama tentang Matematika dalam kehidupan sehari-hari 	<ul style="list-style-type: none"> Menarik kesimpulan 	5 menit
Kegiatan Penutup			
<ul style="list-style-type: none"> Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang determinan dan invers matriks Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang metode sarrus dan minor kofaktor Peserta didik dapat mengidentifikasi matrik yang bisa di determinan dan invers Menginformasikan bahwa pertemuan selanjutnya akan melanjutkan pembahasan tentang persamaan matriks dari sistem persamaan linier. Memberi salam 			20 menit
H. Asesmen			
Jenis Asesmen		Bentuk Asesmen	
<ul style="list-style-type: none"> Asesmen selama proses pembelajaran (formatif) Asesmen pada akhir proses pembelajaran (sumatif). 		<ul style="list-style-type: none"> Sikap (profil pelajar pancasila) berupa: lembar observasi, penilaian diri, penilaian teman sebaya, dan anekdot Performa, berupa presentasi dan pameran hasil karya (mind map, poster dan video) Tes tulis, berupa soal pilihan ganda Tes tulis 	

I. Kegiatan Pembelajaran Ketiga		
Kegiatan Pendahuluan		
Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu
<ul style="list-style-type: none"> Membuka pelajaran dan memberi salam Mengkondisikan kelas untuk belajar diawali dengan membaca Alquran dan berdoa Memulai PBM dengan 	<ul style="list-style-type: none"> Membalas salam Membaca Alquran dan berdoa Merespon pertanyaan 	15 menit

<p>mengajukan pertanyaan yang berhubungan dengan kondisi dan absensi.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mengajukan pertanyaan apersepsi untuk mendorong rasa ingin tahu dan berpikir kritis. • Menyampaikan informasi kompetensi, garis besar cakupan materi, tujuan, manfaat, dan langkah pembelajaran yang akan dilaksanakan peserta didik 	<ul style="list-style-type: none"> • Menjawab secara bergiliran dengan berbagai macam kemungkinan jawaban • Menyimak penjelasan 																
Kegiatan Inti																	
Aktivitas Guru	Aktivitas Siswa	Alokasi Waktu															
<p><u>Memberi Stimulus</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Menunjukkan gambar-gambar berkaitan matriks dalam kehidupan sehari-hari <table border="1" data-bbox="204 1037 691 1289"> <thead> <tr> <th>Bahan</th> <th>Tepung</th> <th>Gula</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Adonan Roti Basah (x)</td> <td>2 kg</td> <td>2 kg</td> </tr> <tr> <td>Adonan Roti Kering (y)</td> <td>1 kg</td> <td>3 kg</td> </tr> <tr> <td>Persediaan</td> <td>6 kg</td> <td>5 kg</td> </tr> <tr> <td>Model Matematika</td> <td>$2x + y \leq 6$</td> <td>$2x + 3y \leq 5$</td> </tr> </tbody> </table>	Bahan	Tepung	Gula	Adonan Roti Basah (x)	2 kg	2 kg	Adonan Roti Kering (y)	1 kg	3 kg	Persediaan	6 kg	5 kg	Model Matematika	$2x + y \leq 6$	$2x + 3y \leq 5$	<ul style="list-style-type: none"> • Memperhatikan gambar yang ditampilkan 	5 menit
Bahan	Tepung	Gula															
Adonan Roti Basah (x)	2 kg	2 kg															
Adonan Roti Kering (y)	1 kg	3 kg															
Persediaan	6 kg	5 kg															
Model Matematika	$2x + y \leq 6$	$2x + 3y \leq 5$															
<p><u>Mengidentifikasi masalah</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Informasi/permasalahan berkaitan dengan gambar-gambar yang disajikan 	<ul style="list-style-type: none"> • Menyampaikan pendapat secara bergilir mengenai gambar-gambar yang ditampilkan 	5 menit															
<p><u>Mengumpulkan data</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Mengintruksikan peserta didik masuk dalam kelompok masing-masing • Mengintruksikan peserta didik secara berkelompok mencari bahan referensi dari buku referensi 	<ul style="list-style-type: none"> • Menggali informasi dari berbagai sumber untuk menjawab LKPD • Berdiskusi untuk menyatukan ide, pendapat, dan informasi yang diperoleh dari 	5 menit															

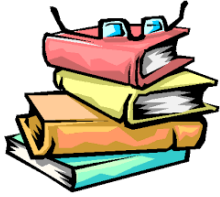
<p>maupun internet untuk dapat menjawab LKPD tentang matrik dalam kehidupan sehari-hari</p> <ul style="list-style-type: none"> • Memantau aktivitas peserta didik <p><u>Mengolah data</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Mengintruksikan peserta didik untuk berdiskusi dengan kelompoknya dan menuliskan hasil pada LKPD. • Memantau aktivitas peserta didik <p><u>Memverifikasi)</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Mengintruksikan setiap kelompok untuk mempresentasikan hasil yang diperoleh <p><u>Menvimpulkan</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Mengintruksikan peserta didik membuat kesimpulan bersama tentang Matematika dalam kehidupan sehari-hari 	<p>berbagai sumber</p> <ul style="list-style-type: none"> • Merancang mind map integrasi/penerapan ilmu matematika dalam berbagai bidang kehidupan • Mempresentasikan hasil diskusi dan menanggapi pertanyaan dari kelompok lain • Menarik kesimpulan 	<p>60 menit</p> <p>20 menit</p> <p>5 menit</p>
Kegiatan Penutup		
<ul style="list-style-type: none"> • Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang persamaan matriks dari sistem persamaan linier • Bersama peserta didik merumuskan kesimpulan tentang sistem persamaan linear dua variabel dengan invers matriks • Peserta didik dapat mengidentifikasi SPLDV yang bisa di inverskan. • Menginformasikan bahwa pertemuan selanjutnya akan melanjutkan pembahasan tentang fungsi invers dan komposisi fungsi • Memberi salam 	<p>20 menit</p>	

J. Asesmen	
Jenis Asesmen	Bentuk Asesmen
<ul style="list-style-type: none"> Asesmen selama proses pembelajaran (formatif) Asesmen pada akhir proses pembelajaran (sumatif). 	<ul style="list-style-type: none"> Sikap (profil pelajar pancasila) berupa: lembar observasi, penilaian diri, penilaian teman sebaya, dan anekdot Performa, berupa presentasi dan pameran hasil karya (mind map, poster dan video) Tes tulis, berupa soal pilihan ganda Tes tulis

REFLEKSI GURU

1	Apakah pembelajaran yang saya lakukan sudah sesuai dengan apa yang saya rencanakan?
2	Bagian rencana pembelajaran manakah yang sulit dilakukan?
3	Apa yang dapat saya lakukan untuk mengatasi hal tersebut?
4	Berapa persen siswa yang berhasil mencapai tujuan pembelajaran?
5	Apa kesulitan yang dialami oleh siswa yang belum mencapai tujuan pembelajaran?
6	Apa yang akan saya lakukan untuk membantu mereka?

➤ **REFLEKSI SISWA : Terlampir pada Lembar Kerja Siswa**

LAMPIRAN**LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK
(LKPD) 1**

Sekolah : SMA Negeri 3 Banda Aceh
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / 1 (Satu)
Materi Pokok : Konsep dan Operasi Matriks
Pertemuan ke 1

Kelompok

- | | |
|----|----|
| 1. | 4. |
| 2. | 5. |
| 3. | |

A. Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat mengetahui istilah matriks dan jenis-jenis matriks
2. Siswa dapat mengenal tranpos matrik dan mengetahui operasi pada matriks
3. Siswa dapat menurunkan sifat-sifat operasi matriks persegi melalui contoh

B. Petunjuk kerja masalah

1. Perhatikan gambar dibawah ini!



Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Dari ilustrasi pada gambar, tentu kamu dapat melihat ruangan kelas tersebut berupa pola baris dan kolom. Yang manakah yang merupakan baris dan kolom?

Baris

Kolom....

2. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks

- a. $A + B$ c. AB
b. $B - A$ d. BA

3. Diketahui

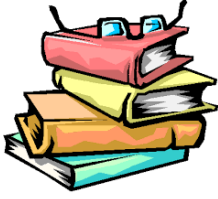
$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Maka $P + Q - R = \dots$

Refleksi Diri

Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan jujur

Bagaimana kalian sekarang?	
1	Bagian mana yang menurutmu paling sulit dari pelajaran ini?
2	Apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaiki hasil belajarmu?
3	Kepada siapa kamu akan meminta bantuan untuk memahami pelajaran ini?
4	Jika kamu diminta untuk memberikan bintang 1 sampai 5, berapa bintang akan kamu berikan pada usaha yang telah kamu lakukan?



LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD) 2

Sekolah : SMA Negeri 3 Banda Aceh
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / 1 (Satu)
Materi Pokok : Determinan dan invers matriks
Pertemuan ke 2

Kelompok

1

4.

2

A. Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat menentukan determinan matriks 2×2
2. Siswa dapat menentukan invers matriks 2×2

B. Petunjuk kerja masalah

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$
- Determinan dari matriks A
 - Invers matriks A

2. Jika nilai determinan dari matriks $\begin{pmatrix} 2a & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ adalah -6, nilai a adalah...

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 7 & k \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, A^{-1} merupakan matriks invers dari A. A dan A^{-1} mempunyai determinan yang sama dan positif, maka tentukanlah nilai k .

4. P dan Q adalah matriks 2×2 seperti yang terlihat di bawah:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika P^{-1} adalah invers dari matriks P dan Q^{-1} adalah invers dari matriks Q, maka determinan matriks $P^{-1} \cdot Q^{-1}$ adalah....

Refleksi Diri

Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan jujur

Bagaimana kalian sekarang?	
1	Bagian mana yang menurutmu paling sulit dari pelajaran ini?
2	Apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaiki hasil belajarmu?
3	Kepada siapa kamu akan meminta bantuan untuk memahami pelajaran ini?
4	Jika kamu diminta untuk memberikan bintang 1 sampai 5, berapa bintang akan kamu berikan pada usaha yang telah kamu lakukan?

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD) 3

Sekolah : SMA Negeri 3 Banda Aceh
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / 1 (Satu)
Materi Pokok : Sistem Persamaan Linear dengan matriks.
Pertemuan ke 3

Kelompok

- | | |
|----|----|
| 4. | 4. |
| 5. | 5. |
| 6. | |

A. Tujuan Pembelajaran

1. Siswa dapat menentukan persamaan matriks dari sistem persamaan linier.
2. Siswa dapat menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dengan matriks invers.

B. Petunjuk kerja masalah

1. Perhatikan masalah berikut!



Suatu hari Irma membeli 2 kg Apel dan 3kg Jeruk dengan harga Rp57.000, sedangkan Ade membeli 3 kg Apel dan 5 kg Jeruk dengan harga Rp90.000. jika Surya hanya membeli 1 kg Apel dan 1 kg Jeruk, berapakah uang yang harus Surya keluarkan?

Ubahlah permasalahan tersebut kedalam bentuk matriks!

Kita akan mengubah SPLDV menjadi bentuk matriks dengan ordo 2×2

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$ (persamaan matriks A)

Dimana

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} =$ (disebut matriks A)

$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} =$ (disebut matriks B)

Tentukan invers matriks A

Kalikan matriks B dengan invers matriks A

Tentukan nilai a dan j dari hasil kali matriks B dan invers matriks A

Kalian dapat menentukan harga 1 kg Apel dan 1 kg Jeruk dari hasil perkalian matriks di atas

2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

3. Tentukan penyelesaian dari SPLTV berikut ini dengan menggunakan metode determinan

$$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 7 \end{cases}$$

Refleksi Diri

Jawablah pertanyaan dibawah ini dengan jujur

Bagaimana kalian sekarang?	
1	Bagian mana yang menurutmu paling sulit dari pelajaran ini?
2	Apa yang akan kamu lakukan untuk memperbaiki hasil belajarmu?
3	Kepada siapa kamu akan meminta bantuan untuk memahami pelajaran ini?
4	Jika kamu diminta untuk memberikan bintang 1 sampai 5, berapa bintang akan kamu berikan pada usaha yang telah kamu lakukan?

LAMPIRAN

PERTEMUAN PERTAMA KONSEP MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

1. Konsep Matriks

Coba kalian perhatikan susunan benda-benda disekitar kamu! Sebagai contoh, susunan buku di meja, susunan buku di lemari, posisi siswa berbaris di lapangan, susunan keramik lantai, dan lain-lain.



Gambar 3.1. Susunan keramik/ubin di lantai

Tentu kalian dapat melihat susunan tersebut dapat berupa pola baris atau kolom, bukan? Bentuk susunan berupa baris dan kolom akan melahirkan konsep matriks yang akan kita pelajari.

Sebagai contoh lainnya adalah susunan angka dalam bentuk tabel. Pada tabel terdapat baris atau kolom, banyak baris atau kolom bergantung pada ukuran tabel tersebut. Ini sudah merupakan gambaran dari sebuah matriks. Agar kita dapat segera menemukan konsepnya, perhatikan beberapa gambaran dan permasalahan berikut.

Sebagai gambaran awal mengenai matriks, sekarang kalian cermati uraian berikut. Diketahui harga tiket masuk suatu museum dapat dinyatakan sebagai tabel berikut:

Tabel Harga Karcis

Golongan	Hari Minggu/Libur (Rp.)	Hari Biasa (Rp.)
Anak	5.000	3.000
anak Dewasa	15.000	10.000

Data tersebut, dapat di sajikan kembali tanpa harus di dalam tabel, dengan cara menghilangkan kepala baris dan kepala kolom seperti berikut ini:

$$\begin{array}{c} \text{kolom} \\ \downarrow \\ \text{baris} \rightarrow \begin{bmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bentuk penulisan tersebut, menunjukkan terdapat 2 baris dan 2 kolom.

Berdasarkan permasalahan nyata diatas, maka dapat kita simpulkan bahwa:

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom, dan ditempatkan dalam tanda kurung biasa atau kurung siku.

Matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, B, dan C.

Bentuk umum Matriks

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

→ baris ke-1
 → baris ke-2
 → baris ke-3
 → baris ke-m

↓ kolom ke-1 ↓ kolom ke-2 ↓ kolom ke-3 ↓ kolom ke-n

Pada bentuk matriks tersebut, terlihat hal-hal sebagai berikut.

1. Banyaknya baris dan kolom matriks A berturut-turut adalah m dan n buah.
2. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{mn}$ = disebut dengan elemen-elemen matriks A, a_{mn} = elemen A pada baris ke-m, kolom ke-n.

Ordo atau ukuran suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom.

Secara umum berlaku:

Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks A berordo $m \times n$ atau ordo matriks A adalah $m \times n$, ditulis:

$A_{m \times n}$ (dibaca: "A m kali n").

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ disebut Matriks berordo 2×2 , yang menunjukkan banyaknya baris 2 dan banyaknya kolom 2, dan ditulis $A_{2 \times 2}$
2. $B = (-1 \ 0 \ 2)$ disebut Matriks berordo 1×3 , yang berarti menunjukkan banyaknya baris 1 dan banyaknya kolom 3, dan ditulis $B_{1 \times 3}$
3. $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & 10 \\ -6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ disebut Matriks berordo 3×3 , yang berarti menunjukkan banyaknya baris 3 dan banyaknya kolom 3, dan ditulis $C_{3 \times 3}$

2. Jenis-jenis Matriks

- 1) **Matriks Baris**, yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris saja dan banyaknya kolom n , mempunyai ordo $1 \times n$

Contoh : $P_{1 \times 3} = (1 \ 2 \ 3)$

- 2) **Matriks Kolom**, yaitu matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja dan banyaknya baris m , mempunyai ordo $m \times 1$

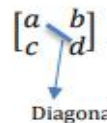
Contoh : $Q_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

- 3) **Matriks Persegi Panjang**, yaitu matriks yang banyaknya baris tidak sama dengan banyaknya kolom, mempunyai ordo $m \times n$

Contoh : $R_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ atau $R_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

- 4) **Matriks Persegi atau Matriks Bujur sangkar**, yaitu matriks yang mempunyai banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, mempunyai ordo $n \times n$

Contoh : $S_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \\ -5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ atau $S_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow$ matriks persegi berordo 2×2

 Diagonal Utama

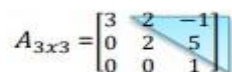
- 5) **Matriks Diagonal**, yaitu matriks persegi berordo $n \times n$, dengan semua elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol

Contoh :

$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Diagonal Utama



- 6) **Matriks Segitiga Atas**, yaitu matriks persegi $n \times n$, dan semua elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol

Contoh :

$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$


- 7) **Matriks Segitiga Bawah**, yaitu matriks persegi $n \times n$, dan semua elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol

Contoh :

$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$


- 8) **Matriks identitas (matriks satuan)**, yaitu matriks diagonal dengan ordo $n \times n$, dan semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu, dinotasikan dengan huruf "I"

Contoh :

$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Elemen diagonal utamanya bernilai 1


- 9) **Matriks Nol**, yaitu matriks berordo $m \times n$ dengan semua elemennya bernilai nol

Contoh : $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Transpose Matriks (Matriks Transpose)

Transpose dari suatu matriks A berordo $m \times n$ adalah sebuah matriks baru yang berordo $n \times m$ yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom dan sebaliknya.

Transpose suatu matriks dinotasikan dengan A^t

Agar lebih jelasnya, perhatikan gambar di bawah ini:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad \text{Transpose matriks A dinotasikan dengan } A_{2 \times 3}^t = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Contoh :

1. Jika Matriks $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ maka matriks transposenya adalah $A_{3 \times 2}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2. Jika Matriks $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ maka matriks transposenya adalah $B_{2 \times 2}^t = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

3. Jika Matriks $C_{1 \times 3} = [3 \ 0 \ -2]$ maka matriks transposenya adalah $C_{3 \times 1}^t = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan matriks B dikatakan sama, jika dan hanya jika:

- ordo matriks A **sama** dengan ordo matriks B;
- semua elemen yang **seletak** pada matriks A dan matriks B nilainya sama.

Perhatikan untuk matriks berikut ini.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 4+1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 5 \\ 7 & 3^2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 8 & 3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } 2m = 6$$

$$m = 3$$

$$3n = -6$$

$$n = -2$$

3 seletak dengan $\sqrt{9}$
 4 + 1 seletak dengan 5
 9 seletak dengan 3^2

Contoh soal

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4a & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3b \\ 5 & 3c & 9 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3a \\ 5 & b & 9 \end{bmatrix}$

Jika $A = B$, maka $a + b + c = \dots$

Jawaban:

$$\begin{array}{rcl} 4a = 12 & -3b = -3a & 3c = b \\ a = 3 & -3b = -3(3) & 3c = 3 \\ & -3b = -9 & c = 1 \\ & b = 3 & \end{array}$$

maka nilai $a + b + c = 3 + 3 + 1 = 7$

2. Diketahui persamaan matriks $A = B^T$ (B^T adalah transpose matriks B), dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2c - 3b & 2a + 2 \\ a & b + 7 \end{bmatrix} \text{ Nilai } a + b + c = \dots$$

Jawaban:

$$\text{Matriks } B = \begin{bmatrix} 2c - 3b & 2a + 2 \\ a & b + 7 \end{bmatrix} \text{ maka } B^T = \begin{bmatrix} 2c - 3b & a \\ 2a + 2 & b + 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Karena } A = B^T \text{ maka } \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c - 3b & a \\ 2a + 2 & b + 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 = a & 2b = 2a + 2 & 3c = b + 7 \\ a = 2c - 3b & 2b = 2(4) + 2 & 3c = 5 + 7 \\ 4 = 2c - 3b & 2b = 8 + 2 & 3c = 12 \\ & 2b = 10 & c = 4 \\ & b = 5 & \end{array}$$

Maka nilai $a + b + c = 4 + 5 + 4 = 13$

3. Operasi Pada Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Apabila dua buah matriks memiliki **ordo yang sama**, penjumlahan dua matriks itu adalah **penjumlahan elemen-elemen yang seletak** pada kedua matriks itu.

Contoh:

$$\text{Diketahui matriks } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } A + B = \begin{bmatrix} 2 + 5 & 3 + (-1) \\ 6 + 4 & 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks secara prinsip sama dengan penjumlahan antara dua matriks, apabila dua buah matriks memiliki **ordo yang sama**, pengurangan dua matriks itu adalah **pengurangan elemen-elemen yang seletak** pada kedua matriks itu. Atau penjumlahan dua matriks dengan slawannya.

Contoh:

$$\text{Diketahui matriks } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Maka } A - B = \begin{bmatrix} 2 - 5 & 3 - (-1) \\ 6 - 4 & 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks Skalar

Jika matriks A dan B berordo sama, dan $k, m \in \mathbb{R}$ (bilangan Real), maka Berlaku sifat-sifat:

1. $kA = Ak$
2. $(k+m)A = kA + mA$
3. $k(A+B) = kA + kB$
4. $k(mA) = (km)A$

Contoh:

Jika $P = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ tentukanlah:

- a) $2P$
- b) $-4P$

Jawab:

$$a) 2P = 2 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b) -4P = -4 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 5 & -4 \cdot (-1) \\ -4 \cdot 4 & -4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 4 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$$


4. Perkalian Dua Matriks

Dapat disimpulkan operasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks A sama dengan banyak kolom pada matriks B. Banyak perkalian akan berhenti jika setiap elemen baris ke- n pada matriks A sudah dikalikan dengan setiap elemen kolom ke- n pada matriks B.

Sehingga jika kita misalkan Matriks $A_{m \times n}$ dan Matriks $B_{n \times x}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika **banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B**.

Hasil perkalian dua matriks $A \times B$ adalah sebuah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari penjumlahan hasil perkalian antara elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B.

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$
Maka secara umum berlaku
 $A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 1} = C_{2 \times 1} \rightarrow$ matriks hasil kali

 **banyaknya kolom Harus sama dengan banyaknya baris**
Ordo hasil kali (2 x 1)

Sehingga

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{bmatrix}$$

Contoh 1:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tentukanlah AB !

Penyelesaian:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(2) + 5(1) & 4(3) + 5(0) & 4(4) + 5(2) \\ 2(2) + 1(1) & 2(3) + 1(0) & 2(4) + 1(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 + 5 & 12 + 0 & 16 + 10 \\ 4 + 1 & 6 + 0 & 8 + 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 12 & 26 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

PERTEMUAN KEDUA DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

1. Determinan

Determinan matriks adalah nilai yang diperoleh dari matriks persegi. Si determinan ini adalah fungsi yang akan memetakan matriks persegi ke bilangan real.

Nilai determinan disimbolkan dengan “|...|”, misalnya matriks A, nilai determinannya menjadi $\det A = |A|$.

Rumus Determinan Matriks 2×2

Untuk matriks berordo 2×2 (terdiri dari dua baris dan dua kolom), nilai determinannya bisa dicari seperti berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Cara menghitung determinan matriks ordo 2×2 adalah dengan mengalikan elemen-elemen yang ada di diagonal utama, lalu kurangkan dengan elemen-elemen di diagonal sekunder.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 20 - 6 = 14$$

Rumus Determinan Matriks 3×3 Metode Sarrus

Jadi, untuk mencari determinan matriks 3×3, kita bisa menggunakan beberapa metode, seperti Metode Sarrus dan Minor-Kofaktor.

Pertama, kita bakal bahas Metode Sarrus. Metode ini hanya bisa digunakan pada determinan matriks 3×3, jadi selain itu tidak bisa pakai metode tersebut.

Misalnya, ada matriks A berordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Maka:

zenius

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- - - + + +

Ilustrasi matriks (Dok. Arsip Zenius)

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

contoh:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 24 + 6 - 9 - 4 - 8 = 11$$

Rumus Determinan Matriks 3×3 Minor Kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari matriks A di atas, kita buang elemen A_{ij} , maksudnya adalah matriks A elemen ke i dan ke j . Misal, kita mau pilih A_{12} , berarti kita harus buang baris ke-1 dan kolom ke-2.

Determinan Matriks 3 × 3

2 Metode Minor-Kofaktor

A_{ij}	Minor $M_{ij} = \det(A_{ij})$	Kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	$C_{11} = M_{11}$
$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$	$C_{12} = -M_{12}$
$A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$	$\rightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$	$C_{13} = M_{13}$

$\det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$

Dari gambar di atas, ada yang namanya minor dan kofaktor. Minor (M) adalah determinan dari matriks yang beberapa elemennya udah dibuang. Sedangkan, kofaktor (C atau K) memiliki rumus ± 1 pangkat elemen $i + j$ dikalikan dengan minornya $\gg (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1(-2) - 2(-8) + 3(-1) = -2 + 16 - 3 = 11$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Sifat-sifat Determinan Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $n \times n$. Kita bisa rangkum sifatnya sebagai berikut.

1. $|AB| = |A| |B|$
2. $|A^T| = |A|$, T: transpose matriks
3. $|kA| = k^n |A|$, k: bilangan skalar/riil dan n: ordo matriks A
4. $|A^{-1}| = 1/|A|$ (invers matriks)
5. Baris atau kolom yang semua elemennya bernilai nol, maka determinan matriksnya = 0
6. Dua baris atau kolom yang elemennya sama/kelipatannya, maka determinan matriksnya = 0

2. Invers Matriks

Invers matriks adalah matriks baru yang merupakan kebalikan dari matriks asal. Invers matriks adalah salah satu metode penting untuk menyelesaikan soal-soal di dalam sebuah matriks. Sebelum mencari invers suatu matriks harus menentukan determinannya terlebih dahulu.

Invers sendiri dapat diartikan sebagai lawan dari sesuatu (kebalikan). Jika suatu matriks memiliki invers, dapat dikatakan matriks tersebut adalah *matriks nonsingular*. Sebaliknya, jika suatu matriks tidak memiliki invers, maka matriks tersebut merupakan *matriks singular*.

Invers matriks adalah sebuah kebalikan (invers) dari kedua matriks. Apabila matriks tersebut dikalikan akan menghasilkan matriks persegi ($AB = BA = I$). Simbol dari invers matriks adalah pangkat -1 dan terletak di atas hurufnya. Sebagai contoh, matriks B adalah invers matriks A sehingga ditulis $B = A^{-1}$ dan matriks A adalah invers dari matriks B ditulis $A = B^{-1}$. Matriks A dan B merupakan dua matriks yang saling invers (berkebalikan). Invers matriks terdiri dari dua jenis, yaitu matriks persegi (2×2) dan matriks 3×3 .

Rumus invers matriks ordo 2×2 dan 3×3

Rumus Invers Matriks

o Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

o Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3×3 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

Sifat-sifat dari matriks terbalik adalah sebagai berikut :

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- $AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- **Jika $XA = B$, maka $X = BA^{-1}$**
- **Jika $AX = b$, maka $X = A^{-1}B$**

Contoh 1:

Tentukan invers matriks dari:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, cari determinan matriks
 $\det(A) = 6 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 12 - 4 = 8$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \times 6 & \frac{1}{8} \times (-1) \\ \frac{1}{8} \times (-4) & \frac{1}{8} \times 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Contoh 2:

Matriks A dikenal sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Menentukan kebalikan dari matriks di atas A!

Jawab:

1. Langkah pertama ialah mencari matriks kofaktornya

$$\begin{aligned} \text{Kof } A &= \begin{vmatrix} + & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ \text{Kof } A &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. Selanjutnya mencari adjoin matriksnya:

$$\text{Kof } A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Maka Adjoin Matriks nya akan menjadi

$$\text{Adj } A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Kemudian mencari Determinan Matriks A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (2.1.3) + (0.2.4) + (1.3.2) - (1.1.4) - (2.2.2) - (0.3.3) \\ &= 6 + 0 + 6 - 4 - 8 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Langkah terakhir ialah mencari Invers Matriks A

$$A^{-1} = 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

PERTEMUAN KETIGA

PERSAMAAN MATRIKS DARI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

1. Penyelesaian Persamaan Matriks

Apabila A, B, dan X adalah matriks-matriks persegi berordo 2, dan A adalah matriks *tak-singular* yang mempunyai invers, yakni A^{-1} .

- a. Penyelesaian persamaan matriks $AX=B$ ditentukan oleh:

$$X = A^{-1}B$$

- b. Penyelesaian persamaan matriks $XA=BA$ ditentukan oleh:

$$X = A^{-1} B$$

Sistem persamaan linear dua peubah: $\begin{cases} ax + by = p \\ zx = dy = q \end{cases}$ dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks, yakni:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Sehingga himpunan penyelesaiannya dapat ditentukan oleh:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Selain dengan persamaan matriks, teknik menyelesaikan sistem persamaan linier juga dapat dilakukan dengan determinan matriks. Aturan dengan cara ini adalah :

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. sehingga

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{maka } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan $2x - 3y = 8$ dan $x + 2y = -3$ dengan metode:

- Invers matriks
- Determinan

Jawab:

- Langkah 1: Ubah persamaan menjadi bentuk matriks $AX = B$.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ x + 2y = -3 \end{array} \quad \text{maka} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Langkah 2: Ubah matriks menjadi bentuk invers matriks $X = A^{-1}B$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{4 - (-3)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 16 - 9 \\ -8 - 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi $x = 1$ dan $y = -2$

- Metode determinan

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (-3)(1) = 4 + 3 = 7$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = (8)(2) - (-3)(-3) = 16 - 9 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (8)(1) = -6 - 8 = -14$$

$$\text{Maka } x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{7} = -2$$

2. Penyelesaian SPLTV dengan Metode Determinan

Bentuk umum SPLTV sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_{11} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_{21} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_{31} \end{cases}$$

Ditentukan oleh:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}, \text{ untuk } D \neq 0.$$

Dengan :

$a_{11}, a_{12},$ dan a_{13} masing-masing merupakan koefisien-koefisien bagi variabel x,
 $a_{21}, a_{22},$ dan a_{23} masing-masing merupakan koefisien-koefisien bagi variabel y,
 $a_{31}, a_{32},$ dan a_{33} masing-masing merupakan koefisien-koefisien bagi variabel z, serta
 $b_{11}, b_{21},$ dan b_{31} masing-masing merupakan konstanta-konstanta yang diketahui.

PENILAIAN

Teknik penilaian

Penilaian Sikap: Non Tes, Bentuk Pengamatan Sikap dalam Pembelajaran

Penilaian Pengetahuan: Teknik Tes Tertulis, Bentuk Uraian

Penilaian Keterampilan: Teknik Non Tes, Bentuk Kinerja

No	Indikator Penilaian	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Sikap: Menunjukkan sikap rasa ingin tahu dalam menyelesaikan permasalahan matematika matriks	Pengamatan	Selama pembelajaran dan saat diskusi.
2	Pengetahuan: Menemukan rumus determinan dan invers matriks	Tes tertulis	Penyelesaian tugas individu, kelompok
3	Keterampilan: Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dengan invers matriks	Tes tulis dan Pengamatan	Penyelesaian tugas (baik individu maupun kelompok) dan saat diskusi.

A. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

- Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$
 - Determinan dari matriks A
 - Invers matriks A
- Jika $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, A^{-1} merupakan matriks invers dari A. A dan A^{-1} mempunyai determinan yang sama dan positif, maka tentukanlah nilai k.
- P dan Q adalah matriks 2×2 seperti yang terlihat di bawah:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 Jika P^{-1} adalah invers dari matriks P dan Q^{-1} adalah invers dari matriks Q, maka determinan matriks $P^{-1} \cdot Q^{-1}$ adalah....
- Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
Tentukan matriks

- a. $A + B$ c. AB
b. $B - A$ d. BA
5. Suatu hari Irma membeli 2 kg Apel dan 3 kg Jeruk dengan harga Rp57.000, sedangkan Ade membeli 3 kg Apel dan 5 kg Jeruk dengan harga Rp90.000. Jika Surya hanya membeli 1 kg Apel dan 1 kg Jeruk, berapakah uang yang harus Surya keluarkan?

B. Instrumen Penilaian **Sikap: Aktif dan Teliti**

Rubrik:

Indikator sikap aktif dalam pembelajaran:

1. Kurang baik *jika* menunjukkan sama sekali tidak ambil bagian selama proses pembelajaran
2. Cukup *jika* menunjukkan ada sedikit usaha ambil bagian selama proses pembelajaran tetapi belum konsisten
3. Baik *jika* menunjukkan sudah ada usaha ambil bagian selama proses pembelajaran tetapi belum konsisten
4. Sangat baik *jika* menunjukkan sudah ambil bagian selama proses pembelajaran secara terus menerus dan konsisten

Indikator sikap teliti dalam pembelajaran:

1. Kurang baik *jika* sama sekali tidak berusaha untuk teliti selama proses pembelajaran
2. Cukup *jika* menunjukkan ada sedikit usaha untuk teliti selama proses pembelajaran tetapi masih belum konsisten
3. Baik *jika* menunjukkan sudah ada usaha untuk teliti selama proses pembelajaran tetapi masih belum konsisten
4. Sangat baik *jika* menunjukkan sudah teliti selama proses pembelajaran secara terus menerus dan konsisten

Isi kolom dengan 1, 2, 3, atau 4 sesuai dengan kondisi peserta didik.

No. Siswa	Nama Siswa	Aktif	Teliti