



MODUL AJAR FASE F KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

TAHUN PELAJARAN 2022/ 2023

**PENYUSUN :
ROHMATUL IZZAH, S.Si.**

PEMERINTAH PROVINSI JAWA TIMUR
DINAS PENDIDIKAN
WILAYAH CABANG KABUPATEN GRESIK

SMA NEGERI 1 DUKUN

Jln Raya Mentaras No 34 Dukun
e-mail: smandugres@gmail.com



A. INFORMASI UMUM

1. Identitas Sekolah

Nama Penyusun	: ROHMATUL IZZAH, S.Si.
Sekolah	: SMA NEGERI 1 DUKUN
Tahun Pelajaran	: 2022/ 2023
Semester	: Ganjil
Jenjang Sekolah	: SMA
Fase / Kelas	: F / 11
Domain/ Topik	: Aljabar dan Fungsi/ Komposisi fungsi dan fungsi Invers
Alokasi Waktu	: 24 JP x 45 Menit

2. Kompetensi Awal

Operasi Aljabar Fungsi

3. Profil Pelajar Pancasila

Siswa aktif berdiskusi dalam kegiatan pembelajaran dan bernalar kritis dalam mencari jawaban dan tidak pantang menyerah dalam belajar

4. Sarana dan Prasarana

- Laptop
- Internet
- LCD Proyektor/ Papan Tulis

5. Target Pembelajaran

- Regular/tipikal
- Kesulitan Belajar
- Pencapaian tinggi

6. Model Pembelajaran

Tatap Muka (TM)

7. Metode Pembelajaran

- Problem-Based Learning

B. Komponen Inti

1. Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat

- A.4 Menerapkan operasi aljabar fungsi untuk menunjukkan ekuivalensi ekspresi
- A.5 Menerapkan konsep komposisi fungsi untuk menyederhanakan ekspresi
- A.6 Menganalisis sifat-sifat komposisi fungsi khususnya memperhatikan domain
Menerapkan sifat-sifat komposisi fungsi untuk menyatakan fungsi komposisi dari komposisi dua fungsi atau lebih
- A.8 Memodelkan masalah yang terkait dengan fungsi komposisi
- A.9 Menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi komposisi
- A.10 Menjelaskan konsep invers fungsi



A.11 Mengontruksi rumus invers dari beberapa fungsi (linear, kuadrat, eksponen dan logaritma)

A.12 Menentukan suatu fungsi jika fungsi komposisi dan fungsi lain diketahui

2. Pemahaman Bermakna

Memberikan contoh dalam kehidupan real :

Misalnya, uang saku kita sebesar Rp 100.000,00 setiap minggu. Karena setiap hari Senin, Selasa dan Rabu ada pelajaran tambahan setelah pulang sekolah kita tidak pulang dahulu (langsung lanjut belajar tambahan) maka dibutuhkan uang makan + uang jajan sebesar Rp 10.000,00. Nah, kita kebingungan menentukan uang saku setiap hari selain Senin, Selasa dan Rabu selama satu minggu jika dalam satu minggu itu kita ingin menabung uang sebesar Rp 10.000,00. Dengan bantuan aljabar kita dapat menentukan uang saku kita per hari.

Penyelesaian :

Kita anggap uang saku kita per hari (selain Senin, Selasa dan Rabu karena sudah ada jatahnya, yaitu Rp 10.000,00) dengan x . Maka,

Rp 100.000 = (uang saku 1 minggu)

Rp 10.000 = (uang tabungan selama 1 minggu)

Rp 100.000 - 10.000 = $(3 \times 10.000) + 1(6x - 3x)$

Rp 90.000 = Rp 30.000 + $1(3x)$

x = Rp 20.000

{Mengapa (3×10.000) ? 3 berasal dari Hari Senin, Selasa dan Rabu dalam satu Minggu. Berarti kan ada 3 hari}

{Mengapa $1(6x - 3x)$? 1 berasal dari 1 minggu sedangkan $6x - 3x$ berasal dari 6 hari dalam satu Minggu kecuali Minggu karena libur, dikurangi 3 hari (Senin, Selasa dan Rabu karena telah dijatah)}

Jadi, uang saku per hari yang kita gunakan selain Senin, Selasa dan Rabu (sekali lagi karena telah dijatah) dan selain Minggu (karena libur) maksimal sebesar Rp 20.000,00. Tidak boleh lebih tetapi boleh kurang (hehe, sebagai tambahan tabungan). Boleh lebih tetapi harus konsekuen, yaitu mengurangi jatah uang saku di hari berikutnya.

3. Pertanyaan Pemantik

(Mengingat Kembali Pelajaran waktu SMP)

Mendiskusikan sebagaimana bilangan bulat dapat dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dan dibagi, maka fungsi dapat dijumlahkan, dikurangkan, dikalikan dan dibagi.

Contoh, operasi pada 5 dan 9, yaitu $5+9$, $5-9$, 5×9 , $5 \div 9$. Bagaimana melakukan operasi pada fungsi? Kemudian menjelaskan bahwa Operasi fungsi ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Komposisi fungsi, berbeda dengan operasi penjumlahan atau pengurangan atau operasi perkalian atau operasi pembagian, merupakan bentuk operasi hasil suatu fungsi pada fungsi lainnya

4. Pengetahuan, Keterampilan atau kompetensi Bersyarat

- Operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian
- Operasi Fungsi Aljabar



5. Kegiatan Pembelajaran

PERTEMUAN 1 :

a. Pendahuluan

Orientasi

- Melakukan pembukaan dengan salam pembuka dan berdoa untuk memulai pembelajaran
- Memeriksa kehadiran peserta didik sebagai sikap disiplin
- Guru menyiapkan fisik dan psikis peserta didik dalam mengawali kegiatan pembelajaran

Apersepsi

- Guru mengaitkan materi pembelajaran yang akan dilakukan dengan materi sebelumnya, yaitu : fungsi dan Operasi fungsi aljabar

Motivasi

- Guru menyampaikan tujuan pembelajaran yang akan berlangsung
- Guru memberi informasi gambaran tentang materi operasi komposisi fungsi dan sifat-sifat operasi komposisi fungsi

b. Kegiatan Inti

Present goals and set (Menyampaikan tujuan dan mempersiapkan siswa)

- Peserta didik mendengarkan penjelasan pengantar kegiatan secara garis besar tentang materi komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi
- Peserta didik dipersiapkan oleh guru dalam menerima pembelajaran.

Present information (Menyajikan informasi)

- Peserta didik menerima informasi prosedur dan aturan dalam pembelajaran
- Peserta didik menerima informasi yang berkaitan dengan materi komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi pada modul

Organize students into learning teams (Mengorganisir siswa kedalam tim-tim belajar)

- Peserta didik berkelompok heterogen yang dibentuk oleh guru beranggotakan 4 - 5 orang
- Peserta didik mendengarkan penjelasan guru bahwa siswa harus saling bekerja sama di dalam kelompok
- Peserta didik mendapatkan LKPD yang berkaitan dengan materi komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi

Assist team work and studeny (Membantu kerja tim dan belajar)

- Peserta didik mengumpulkan informasi yang relevan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi pada LKPD dengan pengamatan dan membaca sumber buku siswa dan Modul
- Peserta didik mendiskusikan secara kelompok informasi yang didapat yang berkaitan dengan komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi dengan bimbingan guru

Test on the materials (Mengevaluasi)

- Peserta didik diarahkan menganalisa dan mengevaluasi
- hasil diskusi kelompoknya masing-masing.
- Peserta didik bersama kelompoknya dapat menarik kesimpulan tentang komposisi fungsi dan sifat-sifat komposisi fungsi



- Peserta didik menyajikan/ mempresentasikan hasil diskusi kelompoknya masing-masing
- Peserta didik menanggapi sajian dari perwakilan kelompok lain

Provide recognition (Memberikan pengakuan atau penghargaan)

- Peserta didik menerima langsung hasil pekerjaan yang sudah selesai dikoreksi oleh guru kemudian diberi paraf serta diberi nomor urut peringkat
- Peserta didik menerima penghargaan untuk kelompok yang memiliki kinerja dan kerjasama yang baik

Selama pembelajaran komposisi fungsi dan sifat – sifat komposisi fungsi berlangsung, guru mengamati sikap peserta didik dalam pembelajaran yang meliputi sikap: disiplin, rasa percaya diri, berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, tanggungjawab dan rasa ingin tahu

c. Penutup

- Guru bersama peserta didik menyimpulkan tentang materi komposisi fungsi dan sifat–sifat komposisi fungsi
- Guru bersama peserta didik merefleksi penguasaan materi yang telah dipelajari dengan membuat catatan penguasaan materi.
- Guru memberikan arahan kepada peserta didik untuk materi pada pertemuan berikutnya adalah fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers dan mengakhiri kegiatan belajar dengan memberikan pesan untuk tetap semangat belajar.
- Penutup dan Do'a

PERTEMUAN 2 :

a. Pendahuluan

Orientasi

- Guru melakukan pembukaan dengan salam pembuka dan berdoa untuk memulai pembelajaran
- Guru memeriksa kehadiran peserta didik sebagai sikap disiplin
- Guru menyiapkan fisik dan psikis peserta didik dalam mengawali kegiatan pembelajaran

Apersepsi

- Guru mengaitkan materi pembelajaran yang akan dilakukan dengan materi sebelumnya, yaitu : fungsi , Operasi fungsi aljabar dan komposisi fungsi

Motivasi

- Guru memberi informasi gambaran tentang materi fungsi invers dan sifat – sifat fungsi invers
- Guru menyampaikan tujuan pembelajaran serta metode yang akan dilaksanakan.

b. Kegiatan Inti

Present goals and set (Menyampaikan tujuan dan mempersiapkan siswa)

- Peserta didik mendengarkan penjelasan pengantar kegiatan secara garis besar tentang materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers



- Peserta didik dipersiapkan oleh guru dalam menerima pembelajaran.

Present information (Menyajikan informasi)

- Peserta didik menerima informasi prosedur dan aturan dalam pembelajaran
- Peserta didik menerima informasi yang berkaitan dengan materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers pada modul

Organize students into learning teams (Mengorganisir siswa kedalam tim-tim belajar)

- Peserta didik berkelompok heterogen yang dibentuk oleh guru beranggotakan 4 - 5 orang
- Peserta didik mendengarkan penjelasan guru bahwa siswa harus saling bekerja sama di dalam kelompok
- Peserta didik mendapatkan LKPD yang berkaitan dengan materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers

Assist team work and studenty (Membantu kerja tim dan belajar)

- Peserta didik mengumpulkan informasi yang relevan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers pada LKPD dengan pengamatan dan membaca sumber buku siswa dan modul
- Peserta didik mendiskusikan secara kelompok informasi yang didapat yang berkaitan dengan materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers dengan bimbingan guru

Test on the materials (Mengevaluasi)

- Peserta didik diarahkan menganalisa dan mengevaluasi hasil diskusi kelompoknya masing-masing
- Peserta didik bersama kelompoknya dapat menarik kesimpulan tentang materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers
- Peserta didik menyajikan/ mempresentasikan hasil diskusi kelompoknya masing-masing
- Peserta didik menanggapi sajian dari perwakilan kelompok lain

Provide recognition (Memberikan pengakuan atau penghargaan)

- Peserta didik menerima langsung hasil pekerjaan yang sudah selesai dikoreksi oleh guru kemudian diberi paraf serta diberi nomor urut peringkat
- Peserta didik menerima penghargaan untuk kelompok yang memiliki kinerja dan kerjasama yang baik

Selama pembelajaran materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers berlangsung, guru mengamati sikap peserta didik dalam pembelajaran yang meliputi sikap: disiplin, rasa percaya diri, berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, tanggungjawab dan rasa ingin tahu

c. Penutup

- Guru bersama peserta didik menyimpulkan materi fungsi invers dan sifat–sifat fungsi invers
- Guru bersama peserta didik merefleksikan penguasaan materi yang telah dipelajari dengan membuat catatan penguasaan materi.



- Guru memberikan arahan kepada peserta didik untuk materi pada pertemuan berikutnya adalah invers dari suatu komposisi fungsi dan mengakhiri kegiatan belajar dengan memberikan pesan untuk tetap semangat belajar.

C. Asesmen

- Observasi guru selama kegiatan belajar berlangsung
 - Tanggung jawab mengerjakan tugas
 - Keaktifan peserta didik saat diskusi materi
 - Kesantunan dalam proses belajar
- Penilaian hasil presentasi hasil diskusi (terlampir)
- Penilaian hasil lembar kerja Peserta Didik (terlampir)
- Asesmen Tertulis Pengayaan (terlampir)

D. Pengayaan dan Remedial

- Pengayaan adalah kegiatan pembelajaran yang diberikan pada peserta didik dengan capaian tinggi agar mereka dapat mengembangkan potensinya secara optimal.
- Remedial diberikan kepada peserta didik yang membutuhkan bimbingan untuk memahami materi atau pembelajaran mengulang. Saat merancang kegiatan pengayaan, perlu diperhatikan mengenai diferensiasi contohnya lembar belajar/kegiatan yang berbeda dengan kelas.

E. Refleksi Guru dan Peserta Didik

Refleksi Guru

- Apakah dalam membuka pelajaran dan memberikan penjelasan teknis atau intruksi yang disampaikan untuk pembelajaran yang akan dilakukan dapat dipahami oleh siswa?
- Bagian manakah pada rencana pembelajaran yang perlu diperbaiki?
- Bagaimana tanggapan siswa terhadap materi atau bahan ajar, pengelolaan kelas, latihan dan penilaian yang telah dilakukan dalam pembelajaran?
- Apakah dalam berjalannya proses pembelajaran sesuai dengan yang diharapkan?
- Apakah 100% siswa mencapai tujuan pembelajaran? Jika tidak, berapa persen (%) yang belum tercapai ?
- Apakah arahan dan penguatan materi yang telah dipelajari dapat dipahami oleh siswa?

Refleksi Peserta Didik

- Apakah kamu memahami intruksi yang dilakukan untuk pembelajaran?
- Apakah media pembelajaran, alat dan bahan mempermudah kamu dalam pembelajaran?
- Materi apa yang kamu pelajari pada pembelajaran yang telah dilakukan?
- Apakah materi yang disampaikan, didiskusikan, dan dipresentasikan dalam pembelajaran dapat kamu pahami?
- Manfaat apa yang kamu peroleh dari materi pembelajaran?
- Sikap positif apa yang kamu peroleh selama mengikuti kegiatan pembelajaran?
- Kesulitan apa yang kamu alami dalam pembelajaran?
- Apa saja yang kamu lakukan untuk belajar yang lebih baik?



Mengetahui
Kepala Sekolah



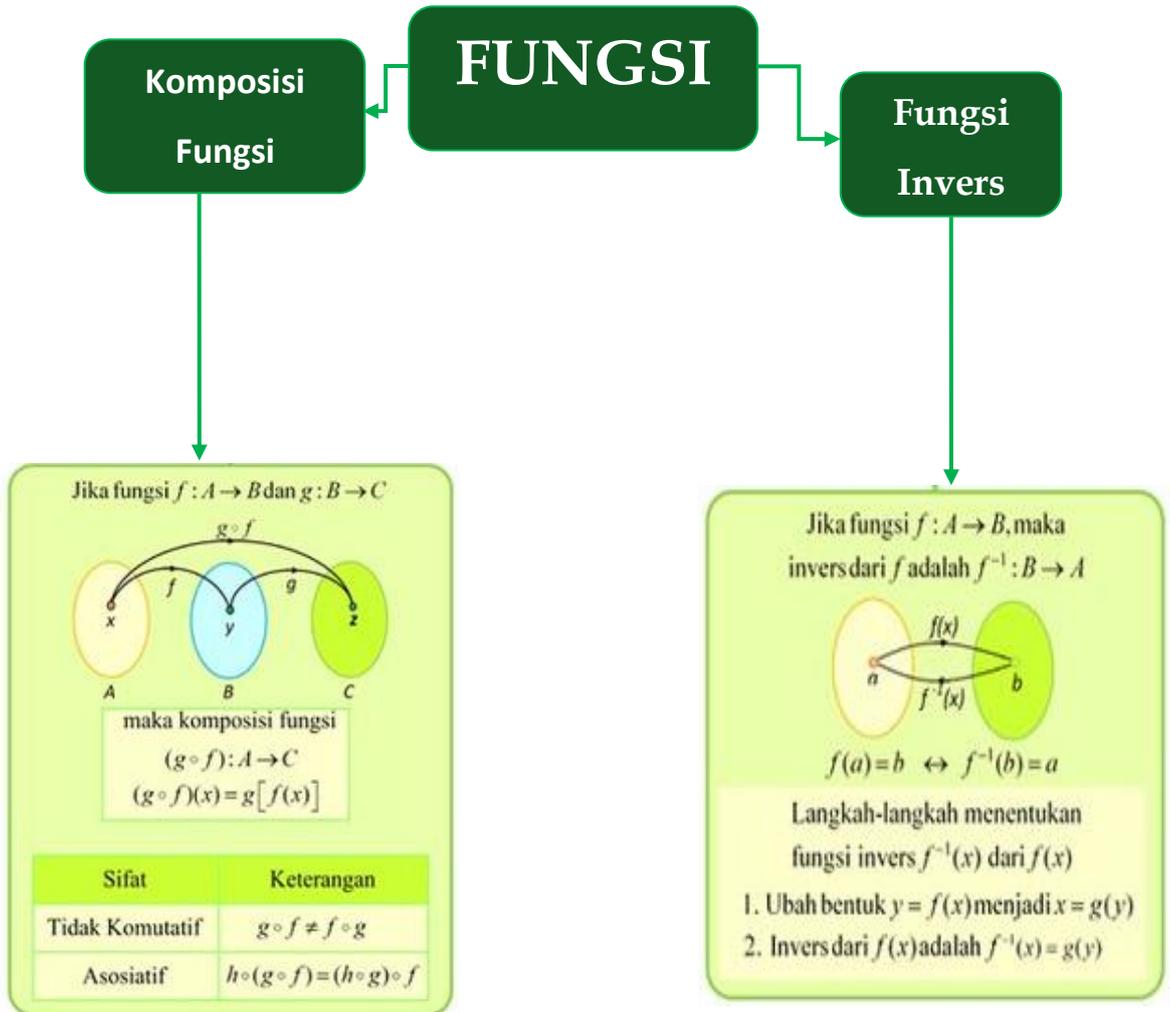
Drs. H. Kholid, M.Pd.
NIP 19640906 198603 1 018

Gresik, Juli 2022
Guru Mata Pelajaran,

Rohmatul Izzah, S.Si.
NIP 199010132022212017

Lampiran 1. Materi Ajar

1. Memahami Peta Konsep



2. Kegiatan Pembelajaran

APERSEPSI





Tentu kalian pernah mendengar kata “komposisi” yang berarti susunan atau gabungan beberapa hal. Misalkan komposisi warna pada sebuah lukisan, komposisi bahan baku dalam pembuatan makanan, komposisi bahan dalam memproduksi suatu barang pada bidang industri. Komposisi – komposisi tersebut dibuat sedemikian sehingga dapat menghasilkan sesuatu yang memuaskan.

Bagaimana membuat komposisi warna agar menghasilkan lukisan yang indah? Bagaimana membuat komposisi bahan makanan agar menghasilkan makanan yang lezat dan nikmat? Bagaimana membuat komposisi bahan baku yang tepat dalam industri sepatu agar menghasilkan sepatu yang kuat dan tahan lama?

Contoh komposisi – komposisi tersebut diatas masih ada kaitan dengan komposisi yang akan kita bahas. Lalu, komposisi seperti apa yang akan kita pelajari?

Pada bab ini, kita akan membahas mengenai komposisi fungsi. Cobalah mengingat kembali mengenai konsep fungsi sebelum masuk bab ini. Jika fungsi telah kalian pelajari dengan baik maka masalah – masalah mengenai komposisi fungsi akan dapat kalian selesaikan dengan baik pula.

Komposisi fungsi melibatkan lebih dari satu fungsi. Suatu fungsi jika di komposisikan dengan fungsi lain akan terbentuk suatu fungsi baru.

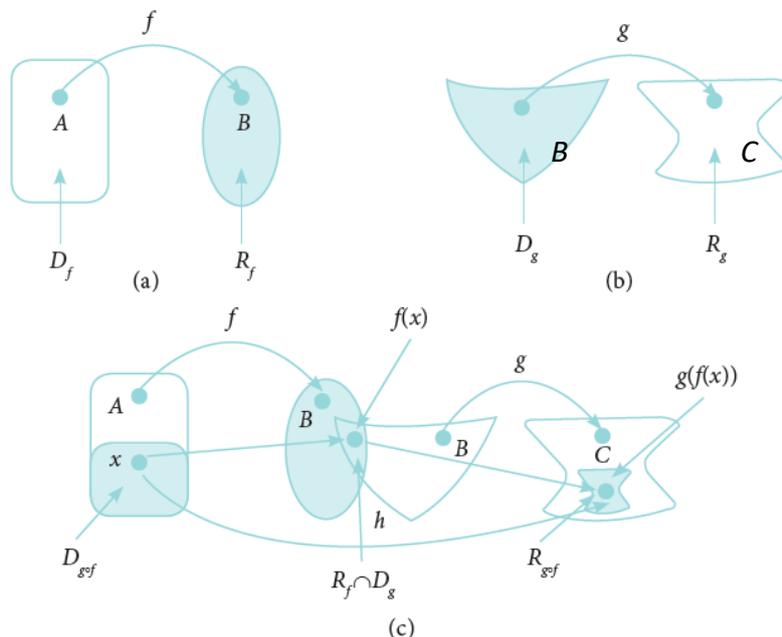
Lalu, apa manfaat dari komposisi fungsi? Dapatkah kita menerapkannya dalam kehidupan sehari – hari? Ternyata, penggunaan komposisi fungsi sering kita lihat dalam berbagai bidang. Coba kalian sebutkan!

Komposisi fungsi tidak rumit, terutama jika kalian sangat memahami fungsi kemudian perhatikan fungsi apa yang berada di depan (susunan penulisannya). Pada bab ini, kalian juga akan mempelajari fungsi invers yang juga berkaitan dengan fungsi. Agar kalian lebih memahami bagaimana membuat komposisi dari dua buah fungsi, variasinya dan lainnya, dapat kalian pelajari lebih mendalam pada bab ini.

KOMPOSISI FUNGSI

A. Pengertian Komposisi Fungsi

Untuk memahami operasi komposisi pada fungsi, perhatikan gambar dibawah ini





Berdasarkan gambar diatas dapat dikemukakan beberapa hal berikut :

- 1) D_f = daerah asal fungsi f , R_f = daerah hasil fungsi f , D_g = daerah asal fungsi g , R_g = daerah hasil fungsi g , $D_{g \circ f}$ = daerah asal komposisi fungsi $g \circ f$, $R_{g \circ f}$ = daerah hasil komposisi fungsi $g \circ f$
- 2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B , ditulis $f: A \rightarrow B$. Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan gambar (a)
- 3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C , ditulis $g: B \rightarrow C$. Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan gambar (b)
- 4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B , ditulis $h: A \rightarrow C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in R_h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan gambar (c)

Berdasarkan beberapa hal diatas diperoleh definisi berikut :

Definisi Komposisi Fungsi

Jika f dan g fungsi serta $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut komposisi fungsi f dan g (ditulis $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Daerah asal komposisi fungsi f dan g adalah $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$, dengan

D_f = daerah asal (domain) fungsi f

D_g = daerah asal (domain) fungsi g

R_f = daerah hasil (range) fungsi f

R_g = daerah hasil (range) fungsi g



Untuk lebih memahami komposisi fungsi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1 :

Jika $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = 3x + 4$, maka tentukan $(f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x + 4) \\ &= 2(3x + 4) - 1 \\ &= 6x + 7\end{aligned}$$

Contoh 2 :

Diketahui : $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = x^2 - x + 3$. Tentukan (x) !

Alternatif Penyelesaian :

B. Menentukan fungsi f atau g jika komposisi fungsi dari f atau g diketahui

Setelah dapat menentukan komposisi fungsi $f \circ g$ atau $g \circ f$ jika fungsi f dan g diketahui, bagaimana jika yang terjadi adalah sebaliknya? Jika fungsi yang diketahui adalah komposisi fungsi dan salah satu fungsi yang membentuk komposisi fungsi tadi, bagaimana cara menentukan fungsi lainnya? Untuk menyelesaikan permasalahan yang seperti itu, dapat dilihat contoh dibawah ini

Contoh 3 :

Diketahui : $g(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 3$, tentukan $f(x)$!

Alternatif Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ f(g(x)) &= x^2 - 4x + 3 \\ f(x - 1) &= x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

misalkan : $x - 1 = a$

$$x = a + 1, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned}f(a) &= (a + 1)^2 - 4(a + 1) + 3 \\ &= a^2 + 2a + 1 - 4a - 4 + 3 \\ &= a^2 - 2a\end{aligned}$$

Sehingga $f(x) = x^2 - 2x$

Contoh 4 :

Diketahui : $g(x) = 3x + 2$ dan $(g \circ f)(x) = 4x - 3$. tentukan $f(x)$!



C. Sifat – sifat komposisi fungsi

Seperti pada umumnya operasi aljabar, baik operasi aljabar pada bilangan maupun operasi aljabar pada fungsi, operasi komposisi pada fungsi juga mempunyai sifat – sifat tertentu. Sifat – sifat operasi komposisi pada fungsi dapat dipahami melalui pengerjaan Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD).

Sifat – sifat komposisi fungsi

- a. Tidak Komutatif

Jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

- b. Asosiatif

Jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $h: C \rightarrow D$, maka $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$

- c. Sifat Identitas

Dalam operasi komposisi pada fungsi-fungsi terdapat sebuah fungsi identitas. sehingga

Soal Latihan .

Agar dapat dipastikan bahwa kalian telah menguasai materi Komposisi Fungsi, maka kerjakan soal berikut secara mandiri di buku kerja kalian masing-masing.

1. Diketahui fungsi $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi $g: R \rightarrow R$ dengan $g(x) = 3x - 7$. Tentukanlah:
 - a. $(f \circ g)(x)$
 - b. $(g \circ f)(x)$
 - c. $(f \circ g)(10)$
 - d. $(g \circ f)(-5)$
2. Diketahui fungsi f dan g dirumuskan sebagai $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ dan $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 18x + 4$. Tentukan rumus dari fungsi f .
3. Diketahui fungsi f dan g dirumuskan sebagai $g(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{3x+2}{3x+1}$, $x \neq -\frac{1}{3}$. Tentukan rumus dari fungsi f .
4. Diketahui fungsi $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dan fungsi $g: R \rightarrow R$ dengan $g(x) = 3x - 1$. Tentukan rumus fungsi $f \circ g(x) + g \circ f(x)$



APERSEPSI



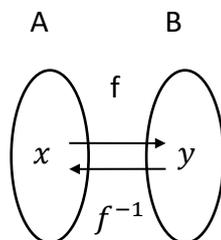
Kehidupan yang sering kita jalani berkaitan erat dengan matematika mungkin banyak dari kita tidak menyadari hal tersebut. Padahal kita sering menjumpai dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah lift. Lift adalah salah satu fasilitas yang memudahkan kita untuk melakukan kegiatan sehari-hari, dimana kita tidak perlu mengeluarkan banyak

tenaga, dan juga lebih menghemat waktu. Cara kerja lift ini merupakan salah satu contoh dari penerapan fungsi invers dimana fungsi invers merupakan fungsi kebalikan dari fungsi lainnya. Proses perpindahan orang yang naik lift merupakan kebalikan dari proses perpindahan orang yang turun lift, begitu juga sebaliknya. Untuk lebih memahami tentang apa itu fungsi invers, mari kita lihat penjelasan mengenai fungsi invers.

FUNGSI INVERS

A. Pengertian Invers Suatu Fungsi

Perhatikan gambar berikut ini :



y merupakan pemetaan dari x oleh fungsi f dan x merupakan pemetaan dari y oleh fungsi f^{-1} maka dikatakan fungsi f dan f^{-1} saling invers.

Jadi $y = f(x)$ dan $x = f^{-1}(y)$

Syarat fungsi mempunyai invers jika fungsi itu korespondensi satu-satu.

Berdasarkan uraian di atas, maka dapat didefinisikan invers suatu fungsi, yaitu sebagai berikut.

Definisi Fungsi Invers

Jika fungsi f memetakan A ke B dinyatakan dalam pasangan terurut $f = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) adalah relasi yang memetakan B ke A , dimana dalam pasangan terurut dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) | y \in B \text{ dan } x \in A\}$



Langkah – langkah Mencari fungsi invers

- Misalkan $f(x) = y$
- Nyatakan x dalam bentuk fungsi y
- Tentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan menukarkan y dengan x pada hasil yang diperoleh dari langkah b.

Contoh 1 :

Diketahui : $f(x) = 5x + 7$, maka tentukanlah rumus fungsi inversnya

Alternatif Penyelesaian :

Misalkan $y = f(x)$, maka

$$y = 5x + 7$$

$$5x = y - 7$$

$$x = \frac{y - 7}{5}$$

Sehingga

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 7}{5}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Perhatikan rumus matematika di samping!

B. Sifat – sifat Fungsi invers

Seperti pada umumnya operasi aljabar, baik operasi aljabar pada bilangan maupun operasi aljabar pada fungsi serta komposisi fungsi, fungsi invers juga mempunyai sifat – sifat tertentu. Sifat – sifat fungsi invers dapat dipahami melalui pengerjaan Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD).

Sifat – sifat fungsi Invers

- Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif
- Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f . Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ maka berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$
- Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f , sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in D_f \text{ dan}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in R_f$$
- Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f , maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, dan dapat disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$



Soal Latihan.

Agar dapat dipastikan bahwa kalian telah menguasai materi fungsi invers, maka kerjakan soal berikut secara mandiri di buku kerja kalian masing-masing.

1. Tentukan invers dari fungsi berikut!

a. $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

b. $g(x) = 2x + 5$

c. $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

d. $p(x) = \sqrt[3]{x+2}$

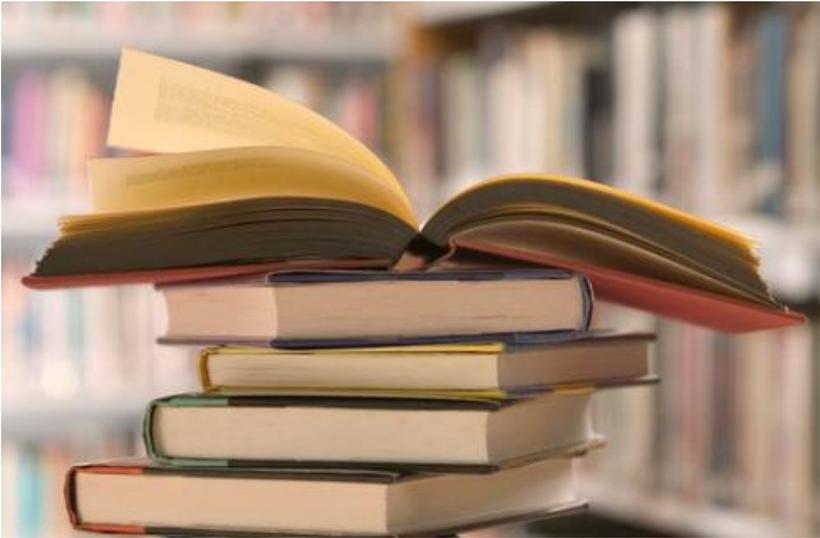
e. $q(x) = x^2 - 2x + 5$

2. Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain besar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, dimana x banyak potong kain yang terjual.

a. Jika suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?

b. Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 dapatkah pedagang kain tersebut menyiapkan potong kain yang harus dijual? (gunakan konsep invers)

APERSEPSI

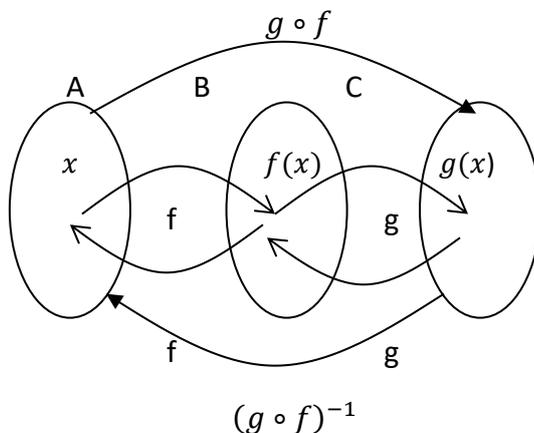


Proses pembuatan buku diproses melalui 2 tahap yaitu tahap editorial dilanjutkan dengan tahap produksi. Pada tahap editorial, naskah diedit dan dilayout sehingga menjadi file yang siap dicetak. Kemudian, file diolah pada tahap produksi untuk mencetaknya menjadi sebuah buku. Proses pembuatan buku ini menerapkan komposisi fungsi. Namun bagaimana

menemukan invers dari permasalahan tersebut? Apa rumus fungsi dari invers komposisi fungsi? Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, mari pelajari materi berikut ini tentang fungsi invers dari komposisi fungsi

INVERS DARI KOMPOSISI FUNGSI

Perhatikan grafik berikut :



Bila suatu fungsi $h : A \rightarrow C$ ditentukan oleh $h = g \circ f$, dengan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ maka fungsi invers dari komposisi fungsi adalah $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ atau dirumuskan:

$$(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1}(x) \circ g^{-1}(x)$$



Contoh 1 :

Diketahui $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 5x + 3$ dan $g(x) = 4 - x$, tentukan rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$

Alternatif Penyelesaian :

$$f(x) = 5x + 3 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{5}$$

$$g(x) = 4 - x \rightarrow g^{-1}(x) = 4 - x$$

Jadi

$$(g \circ f)^{-1}(x) = g^{-1}(x) \circ f^{-1}(x) \\ = 4 - \frac{x - 3}{5}$$

Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = \frac{x+2}{3}$ dan $g(x) = 6x - 3$. Rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ adalah....
2. Diketahui fungsi f dan g adalah fungsi bijektif yang ditentukan dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukan :
 - a. $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$
 - b. f^{-1} dan g^{-1}
 - c. $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$
 - d. $(g^{-1} \circ f^{-1})$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})$
 - e. Kesimpulan apa yang dapat kamu dapatkan dari hasil penyelesaian di atas.
3. Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola MU adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besarnya dana yang diperoleh bergantung pada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari hasil penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 5000x + 2200.000$, dimana x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.
 - a. Tentukan fungsi invers pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola MU.
 - b. Jika dalam suatu pertandingan, klub MU memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 7.000.000.000,00, dapatkah klub memprediksikan berapa banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?



LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK - 1

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / Gasal
Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit
Nama Anggota Kelompok :

1.
2.
3.
4.

Judul LKPD : Komposisi fungsi



Tujuan Pembelajaran

- A.6 Menganalisis sifat-sifat komposisi fungsi khususnya mempertahankan domain
- A.7 Menerapkan sifat-sifat komposisi fungsi untuk menyatakan fungsi komposisi dari komposisi dua fungsi atau lebih
- A.8 Memodelkan masalah yang terkait dengan fungsi komposisi
- A.9 Menyelesaikan masalah yang terkait dengan fungsi komposisi

Alat dan Bahan : Alat Tulis

Langkah – langkah kegiatan :

1. Isilah nama dan anggota kelompoknya pada tempat yang telah disediakan
2. Baca dan pahami pernyataan – pernyataan dari masalah yang disajikan dalam LKPD berikut, kemudian pikirkan kemungkinan jawabannya
3. Silahkan melakukan diskusi kelompok terhadap tugas yang telah disajikan tersebut dan catatlah jawaban kalian pada tempat yang telah disediakan .
4. Jika terdapat masalah yang tidak dapat diselesaikan, tanyakan kepada guru.
5. Tugas dikerjakan selama maksimal 40 menit.
6. Setelah diskusi kelompok selesai, persiapan untuk presentasi



KOMPOSISI FUNGSI

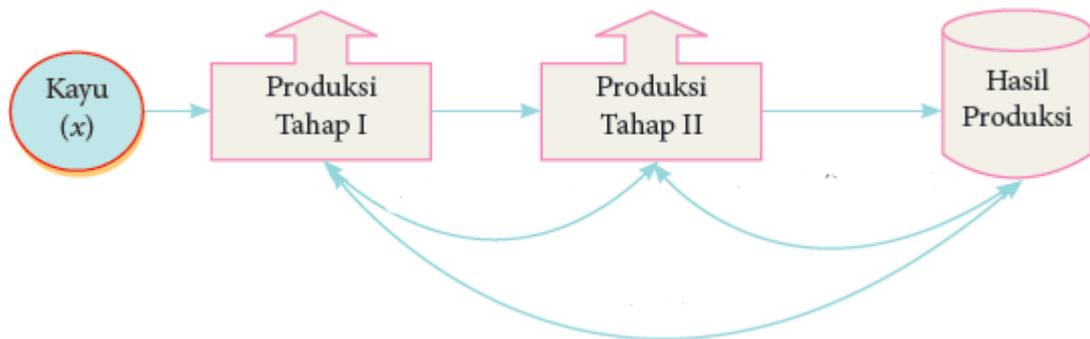
Masalah

Silahkan cermati masalah berikut :

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = x + 2$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = x^2 - 3x$, dengan x merupakan bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk satu produksi 150 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton)

Petunjuk :

Tahap -tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi dapat dihitung sebagai berikut

1. Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah $f(x) = x + 2$, maka tentukan jumlah produksi tahap I tersebut.

Untuk $x = 150$
 $f(x) = x + 2$
 $= 150 + 2$
 $= 152$
Hasil produksi tahap I adalah 152 ton bahan kertas setengah jadi

2. Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $g(x) = x^2 - 3x$,
 Karena hasil produksi pada tahap 1 akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, maka tentukan jumlah produksi tahap II tersebut.

$g(x) = x^2 - 3x$
 $= (152)^2 - 3(152)$
 $= 23.104 - 456$
 $= 22.648$
Hasil produksi tahap II adalah 22.648 ton bahan jadi kertas

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut. Diketahui fungsi - fungsi produksi berikut.

$$f(x) = x + 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$g(x) = x^2 - 3x \dots \dots \dots (2)$$



Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2).

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x + 2) \\ &= (x + 2)^2 - 3(x + 2) \\ &= x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 2 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Substitusikan $x = 150$ ke persamaan (3)

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x^2 + x - 2 \\ g(150) &= (150)^2 + 150 - 2 \\ &= 22500 + 150 - 2 \\ &= 22.648 \end{aligned}$$

Berdasarkan informasi dari penyelesaian permasalahan tersebut, Apa yang dapat kalian simpulkan?

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 22.648 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan menggunakan perhitungan cara pertama dan cara kedua

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x maka dapat ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

SIFAT - SIFAT KOMPOSISI

1. Buatlah 3 fungsi linier yang berbeda

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 50.000 \\ g(x) &= x + 25.000 \\ h(x) &= \frac{1}{4}x + 6.250 \end{aligned}$$

a. SIFAT 1

Komposisi fungsi $(f \circ g)$ dan $(g \circ f)$ adalah :

$$\begin{aligned} \text{a. } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x + 25.000) \\ &= 2(x + 25.000) + 50.000 \\ &= 2x + 100.000 \\ \text{b. } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 50.000) \\ &= (2x + 50.000) + 25.000 \\ &= 2x + 75.000 \end{aligned}$$



Berdasarkan hasil tersebut apakah $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$? **tidak**

Berdasarkan hasil penyelesaian diatas apakah komposisi fungsi berlaku sifat komutatif?
Tidak berlaku



b. SIFAT 2

Komposisi fungsi $((f \circ g) \circ h)$ dan $(f \circ (g \circ h))$ adalah

a. $(f \circ g)(x) = 2x + 100.000$, maka

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= \left((f \circ g) \left(\frac{1}{4}x + 6.250 \right) \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{4}x + 6.250 \right) + 100.000 \\ &= \frac{1}{2}x + 112.500 \end{aligned}$$

b. $(g \circ h)(x) = g(h(x))$

$$\begin{aligned} &= g \left(\frac{1}{4}x + 6.250 \right) \\ &= \frac{1}{4}x + 6.250 + 25.000 \\ &= \frac{1}{4}x + 31.250, \text{ maka} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h)) &= f((g \circ h)(x)) \\ &= f \left(\frac{1}{4}x + 31.250 \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{4}x + 31.250 \right) + 50.000 \\ &= \frac{1}{2}x + 112.500 \end{aligned}$$



Berdasarkan hasil tersebut apakah $((f \circ g) \circ h) = (f \circ (g \circ h))$? **ya**

Berdasarkan hasil penyelesaian diatas apakah komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif? **ya**

c. SIFAT 3

Misalkan I adalah fungsi pada himpunan bilangan real dengan $I(x) = x$

Komposisi fungsi $(f \circ I)$ dan $(I \circ f)$ adalah

a. $(f \circ I)(x) = f(I(x))$

$$\begin{aligned} &= f(x) \\ &= 2x + 50.000 \end{aligned}$$

b. $(I \circ f)(x) = I(f(x))$

$$\begin{aligned} &= I(2x + 50.000) \\ &= 2x + 50.000 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut apakah $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$? **ya**

Berdasarkan hasil penyelesaian diatas apakah komposisi fungsi berlaku sifat identitas? **ya**





Berdasarkan penyelesaian permasalahan tersebut, dapat disimpulkan bahwa sifat – sifat komposisi fungsi adalah:

a. Tidak Komutatif

Jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

b. Asosiatif

Jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $h: C \rightarrow D$, maka $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$

c. Sifat Identitas

Dalam operasi komposisi pada fungsi-fungsi terdapat sebuah fungsi identitas, sehingga $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$

Kartu Penilaian :

No	Tahapan Investigasi	Penilaian			Keterangan
		3	2	1	
1.	Membuat model matematika dari suatu masalah				3 : Membuat 3 model matematika 2 : Membuat 2 atau 1 model matematika 1 : Tidak membuat model matematika
2.	Menunjukkan pemahaman tentang konsep komposisi fungsi				3 : Konsep yang digunakan tepat 2 : Konsep yang digunakan kurang tepat 1 : Konsep yang digunakan tidak tepat
3.	Menunjukkan pemahaman tentang operasi aljabar				3 : Operasi aljabar yang digunakan tepat 2 : Operasi aljabar yang digunakan kurang tepat 1 : Operasi aljabar yang digunakan tidak tepat
4.	Menyimpulkan hasil investigasi (Penyelidikan)				3 : Kesimpulan yang didapatkan tepat 2 : Kesimpulan yang didapatkan kurang tepat 1 : Kesimpulan yang didapatkan tidak tepat
5.	Kerjasama				3 : Kerjasama dan diskusi dengan sangat baik 2 : Kerjasama dan diskusi dengan baik 1 : Kerjasama dan diskusi dengan kurang baik
Jumlah Skor					

Kriteria :

$10 \leq \text{skor total} \leq 15$: Sangat Berhasil

$5 \leq \text{skor total} < 10$: Berhasil

skor total < 5 : Gagal



LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK - 2

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / Gasal
Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit
Nama Anggota Kelompok :

1.
2.
3.
4.

Judul LKPD : Fungsi Invers

Tujuan Pembelajaran

A.10 Menjelaskan konsep invers fungsi

A.11 Mengontruksi rumus invers dari beberapa fungsi (linear, kuadrat, eksponen dan logaritma)



Alat dan Bahan : Alat Tulis

Langkah - langkah kegiatan :

1. Isilah nama dan anggota kelompoknya pada tempat yang telah disediakan
2. Baca dan pahami pernyataan - pernyataan dari masalah yang disajikan dalam LKPD berikut, kemudian pikirkan kemungkinan jawabannya
3. Silahkan melakukan diskusi kelompok terhadap tugas yang telah disajikan tersebut dan catatlah jawaban kalian pada tempat yang telah disediakan .
4. Jika terdapat masalah yang tidak dapat diselesaikan, tanyakan kepada guru.
5. Tugas dikerjakan selama maksimal 60 menit.
6. Setelah diskusi kelompok selesai, persiapkan untuk presentasi



FUNGSI INVERS

Silahkan cermati masalah berikut :



Suatu hari Alif pergi ke Toko Komputer yang ada di Makassar. Alif bermaksud membeli *flashdisk* 35 buah untuk dijual kembali di tokonya. Alif melihat daftar barang beserta harganya. Harga sebuah *flashdisk* tertera Rp 85.000,00.

- Jika Alif membeli *flashdisk* sebanyak 35 buah maka dia akan memperoleh diskon Rp.20.000,00 (Diskon tidak berlaku bila pembelian kurang dari 35 buah). Berapakah uang yang harus dibayar oleh Alif?
- Jika Alif membawa uang Rp. 1.010.000,00 dan berapapun *flashdisk* yang dibeli akan mendapatlan diskon yang sama yaitu Rp 10.000,00. Berapa buah *flashdisk* yang bisa Alif beli?

Petunjuk :

- Tuliskan fungsi dan variabel dalam masalah tersebut dalam simbol matematika (misalnya $f(x)$ dan x).

Misalkan :

x =banyaknya *flashdisk*

$f(x) = y$ = uang yang harus dibayar

Bentuklah persamaan fungsinya

Harga sebuah *flashdisk* tertera Rp 85.000,00 dan mendapatkan diskon Rp.20.000,00 (Diskon tidak berlaku bila pembelian kurang dari 35 buah) sehingga persamaan fungsinya :

$$f(x) = 85.000x - 20.000$$

$$f(35) = 85.000(35) - 20.000$$

$$= 2.935.000$$

Jadi uang yang harus dibayar oleh Alif adalah Rp 2.935.000,00

- Selesaikan secara matematis.

Jika Alif membawa uang Rp. 1.010.000,00 dan berapapun *flashdisk* yang dibeli akan mendapatlan diskon yang sama yaitu Rp 10.000,00 sehingga banyaknya *flashdisk* yang dibeli adalah

$$f(x) = 85.000x - 10.000$$

$$1.010.000 = 85.000x - 10.000$$

$$1.020.000 = 85.000x$$

$$x = \frac{1020000}{85000}$$

$$x = 12$$

Jadi banyaknya *flashdisk* yang bisa Alif beli adalah 12 buah



SIFAT - SIFAT FUNGSI INVERS

SIFAT 1:

1. Berdasarkan model matematika pada soal cerita diatas, tentukanlah fungsi invers pembayaran dan pembelian flashdisk pada soal b :

$$f(x) = 85.000x - 10.000$$

Misalkan $f(x) = y$, maka

$$y = 85.000x - 10.000$$

$$85.000x = y + 10.000$$

$$x = \frac{y + 10.000}{85.000}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y + 10.000}{85.000}$

karena $f^{-1}(y) = \frac{y + 10.000}{85.000}$ maka $f^{-1}(x) = \frac{x + 10.000}{85.000}$

Jadi fungsi inver dari $f(x) = 85.000x - 10.000$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x + 10.000}{85.000}$

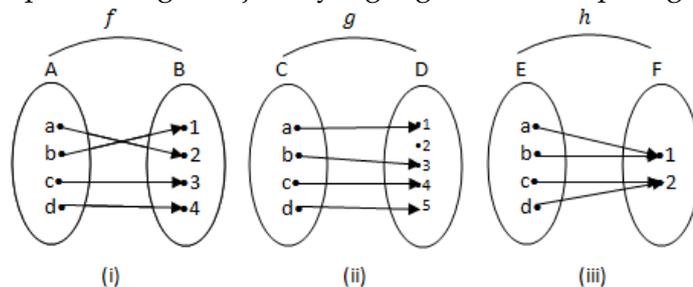
Berdasarkan penyelesaian permasalahan tersebut, maka diperoleh sifat invers :

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f . Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ maka berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$

2. Silahkan cermati masalah berikut :

SIFAT 2:

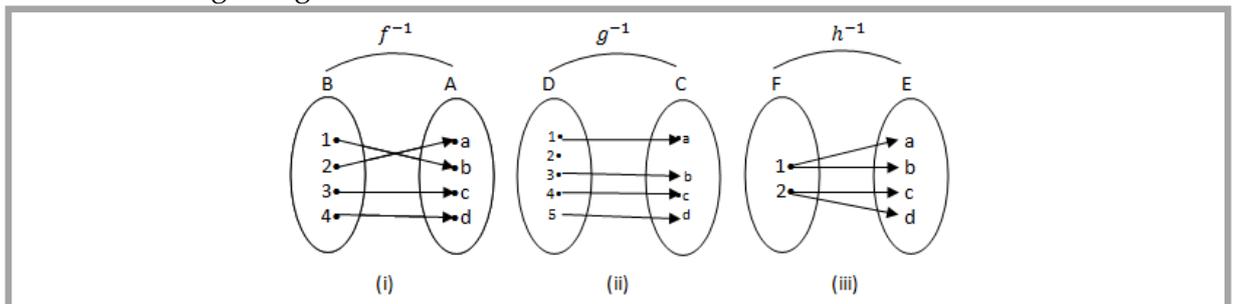
Diketahui $f: A \rightarrow B$ merupakan fungsi bijektif, fungsi $g: C \rightarrow D$ merupakan fungsi injektif dan fungsi $h: E \rightarrow F$ merupakan fungsi surjektif yang digambarkan seperti gambar dibawah ini.



- a) Jika fungsi invers f memetakan B ke A , fungsi invers g memetakan D ke C dan fungsi invers h memetakan F ke E maka gambarlah ketiga invers fungsi berikut.
b) Dari ketiga invers tersebut, tentukanlah mana yang merupakan fungsi

Petunjuk :

- a. Gambarlah ketiga fungsi invers tersebut





b. Amati gambar tersebut dan tentukanlah mana yang merupakan fungsi

Gambar (i) merupakan fungsi
 Gambar (ii) bukan fungsi
 Gambar (iii) fungsi

c. Apa yang dapat kalian simpulkan dari pengamatan gambar tersebut

Berdasarkan pengamatan gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi, tetapi hanya berupa relasi biasa. Fungsi invers fungsi g dan h bukan suatu fungsi melainkan hanya relasi biasa. Invers suatu fungsi yang mempunyai invers disebut invers fungsi.

Berdasarkan uraian tersebut, maka ditemukan sifat berikut :

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif

3. Berdasarkan fungsi dan fungsi invers dari sifat 1 :

SIFAT 3:

Rumus fungsi $(f \circ f^{-1})$ dan $(f^{-1} \circ f)$ adalah :

Diketahui $f(x) = 85.000x - 10.000$ dan $f^{-1}(x) = \frac{x+10.000}{85.000}$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\ &= f\left(\frac{x + 10.000}{85.000}\right) \\ &= 85.000\left(\frac{x + 10.000}{85.000}\right) - 10.000 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}(85.000x - 10.000) \\ &= \frac{85.000x - 10.000 + 10.000}{85.000} \\ &= x \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$$

Berdasarkan uraian tersebut, maka ditemukan sifat berikut :

Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f , sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in D_f \text{ dan}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in R_f$$



4. Berdasarkan fungsi dan fungsi invers dari sifat 1 :

SIFAT 4:

Rumus fungsi $(f^{-1})^{-1}$ adalah :

Diketahui $f(x) = 85.000x - 10.000$ dan $f^{-1}(x) = \frac{x+10.000}{85.000}$

Sehingga diperoleh,

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 10.000}{85.000}$$

Misal $f^{-1}(x) = y$, maka

$$y = \frac{x + 10.000}{85.000}$$

$$85.000 y = x + 10.000$$

$$x = 85.000 y - 10.000$$

Karena $x = (f^{-1})^{-1}(y)$, maka $(f^{-1})^{-1}(y) = 85.000 y - 10.000$

karena $(f^{-1})^{-1}(y) = 85.000 y - 10.000$ maka $(f^{-1})^{-1}(x) = 85.000 x - 10.000$

Jadi fungsi inver dari $f^{-1}(x) = \frac{x+10.000}{85.000}$ adalah $(f^{-1})^{-1}(x) = 85.000 x - 10.000$

Berdasarkan hasil tersebut

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

Berdasarkan uraian tersebut, maka ditemukan sifat berikut :

Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f , maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, dan dapat disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$

Berdasarkan penyelesaian permasalahan tersebut, dapat disimpulkan bahwa sifat - sifat fungsi invers adalah:

- d. Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f . Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ maka berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$
- e. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif
- f. Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f , sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika
$$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in D_f \text{ dan}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x) = x \text{ untuk setiap } x \in R_f$$
- g. Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f , maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, dan dapat disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$



Kartu Penilaian :

No	Tahapan Investigasi	Penilaian			Keterangan
		3	2	1	
1.	Menunjukkan pemahaman tentang konsep invers				3 : Konsep yang digunakan tepat 2 : Konsep yang digunakan kurang tepat 1 : Konsep yang digunakan tidak tepat
2.	Menunjukkan pemahaman tentang operasi aljabar				3 : Operasi aljabar yang digunakan tepat 2 : Operasi aljabar yang digunakan kurang tepat 1 : Operasi aljabar yang digunakan tidak tepat
3.	Menyimpulkan hasil investigasi (Penyelidikan)				3 : Kesimpulan yang didapatkan tepat 2 : Kesimpulan yang didapatkan kurang tepat 1 : Kesimpulan yang didapatkan tidak tepat
4.	Kerjasama				3 : Kerjasama dan diskusi kelompok dengan sangat baik 2 : Kerjasama dan diskusi kelompok dengan baik 1 : Kerjasama dan diskusi kelompok dengan kurang baik
Jumlah Skor					

Kriteria :

$8 \leq \text{skor total} \leq 12$: Sangat Berhasil

$4 \leq \text{skor total} < 8$: Berhasil

skor total < 4 : Gagal



LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK - 3

Mata Pelajaran : Matematika
Kelas / Semester : XI / Gasal
Alokasi Waktu : 2 x 45 Menit
Nama Anggota Kelompok :

1.
2.
3.
4.

Judul LKPD : Invers dari Komposisi Fungsi

Tujuan Pembelajaran



A.12 Menentukan suatu fungsi jika fungsi komposisi dan fungsi lain diketahui serta Menentukan invers dari suatu komposisi fungsi

Alat dan Bahan : Alat Tulis

Langkah - langkah kegiatan :

1. Isilah nama dan anggota kelompoknya pada tempat yang telah disediakan
2. Baca dan pahami pernyataan - pernyataan dari masalah yang disajikan dalam LKPD berikut, kemudian pikirkan kemungkinan jawabannya
3. Silahkan melakukan diskusi kelompok terhadap tugas yang telah disajikan tersebut dan catatlah jawaban kalian pada tempat yang telah disediakan .
4. Jika terdapat masalah yang tidak dapat diselesaikan, tanyakan kepada guru.
5. Tugas dikerjakan selama maksimal 40 menit.
6. Setelah diskusi kelompok selesai, persiapkan untuk presentasi



Langkah

1. Buatlah 2 fungsi linier yang berbeda

$$f(x) = 2x + 6$$
$$g(x) = x - 5$$

2. Tentukan Invers dari masing - masing fungsi linier tersebut

$$f(x) = 2x + 6$$

Misal $f(x) = y$, maka

$$y = 2x + 6$$

$$2x = y - 6$$

$$x = \frac{y - 6}{2}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y - 6}{2}$

Karena $f^{-1}(y) = \frac{y - 6}{2}$ maka $f^{-1}(x) = \frac{x - 6}{2}$

Jadi fungsi invers dari $f(x) = 2x + 6$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x - 6}{2}$

$$g(x) = x - 5$$

Misal $g(x) = y$, maka

$$y = x - 5$$

$$x = y + 5$$

Karena $x = g^{-1}(y)$, maka $g^{-1}(y) = y + 5$

Karena $g^{-1}(y) = y + 5$ maka $g^{-1}(x) = x + 5$

Jadi fungsi invers dari $g(x) = x - 5$ adalah $g^{-1}(x) = x + 5$

3. Tentukan Rumus fungsi berikut

- $(g \circ f)^{-1}(x)$
- $(f \circ g)^{-1}(x)$
- $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
- $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$$\begin{aligned} \text{a. } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 6) \\ &= 2x + 6 - 5 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Misal $(g \circ f)(x) = y$, maka

$$y = 2x + 1$$

$$2x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{2}$$

Karena $x = (g \circ f)^{-1}(y)$, maka $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$

Karena $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$ maka $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

Jadi fungsi invers dari $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ adalah $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$



$$\begin{aligned}
 \text{b. } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= g(x - 5) \\
 &= 2(x - 5) + 6 \\
 &= 2x - 10 + 6 \\
 &= 2x - 4
 \end{aligned}$$

Misal $(f \circ g)(x) = y$, maka

$$\begin{aligned}
 y &= 2x - 4 \\
 2x &= y + 4 \\
 x &= \frac{y + 4}{2}
 \end{aligned}$$

Karena $x = (f \circ g)^{-1}(y)$, maka $(f \circ g)^{-1}(y) = \frac{y + 4}{2}$

Karena $(f \circ g)^{-1}(y) = \frac{y + 4}{2}$ maka $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x + 4}{2}$

Jadi fungsi invers dari $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ adalah $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x + 4}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\
 &= f^{-1}(x + 5) \\
 &= \frac{(x + 5) - 6}{2} \\
 &= \frac{x - 1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } (g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
 &= f^{-1}\left(\frac{x - 6}{2}\right) \\
 &= \frac{x - 6}{2} + 5 \\
 &= \frac{x - 6 + 10}{2} \\
 &= \frac{x + 4}{2}
 \end{aligned}$$

4. Bandingkan antara hasil penyelesaian

- $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
- $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

- Hasil perhitungan $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ sama sehingga menunjukkan bahwa rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$ sama dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
- Hasil perhitungan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ sama sehingga menunjukkan bahwa rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ sama dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Berdasarkan penyelesaian permasalahan tersebut, dapat disimpulkan bahwa rumus komposisi invers adalah:

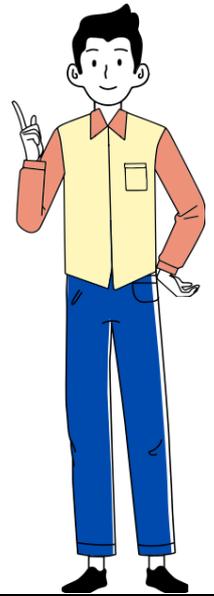
$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$



PENUTUP

Bagaimana kalian sekarang?

Setelah kalian belajar bertahap dan berlanjut melalui kegiatan belajar komposisi fungsi dan fungsi invers, berikut diberikan Tabel untuk mengukur diri kalian terhadap materi yang sudah kalian pelajari. Jawablah sejujurnya terkait dengan penguasaan materi pada Tabel berikut.

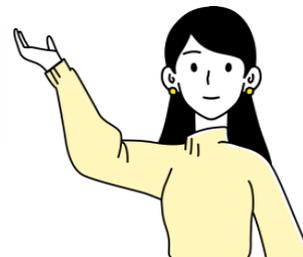


Tabel Refleksi Diri Pemahaman Materi

No	Pertanyaan	Saya Belum Mengerti	Saya mulai Memahaminya	Saya Telah Mengerti
1.	Apakah kalian dapat menentukan komposisi fungsi dan fungsi invers?			
2.	Apakah kalian dapat menyebutkan sifat – sifat komposisi fungsi dan fungsi invers?			
3.	Apakah kalian dapat menentukan invers dari suatu komposisi fungsi			

Jika menjawab “Belum Mengerti” pada salah satu pertanyaan di atas, maka pelajarilah kembali kegiatan belajar 1, 2 dan 3 yang sekiranya perlu kalian ulangi dengan bimbingan guru atau teman sejawat. Jangan putus asa untuk mengulang lagi!. Dan apabila kalian menjawab “Ya” pada semua pertanyaan, maka lanjutkan dengan Tes Formatif.

Dimana Posisimu? Ukurlah diri kalian dalam menguasai materi fungsi dalam rentang 0 – 100, tulislah ke dalam kotak yang tersedia.



Setelah kalian menuliskan penguasaanmu terhadap materi fungsi, lanjutkan kegiatan Anda dengan mengevaluasi penguasaan kalian! Mintalah kepada guru untuk diuji.



Yuk Cek Kemampuanmu!

Selamat belajar dan sukses untuk kalian





Remedial

Materi yang belum dikuasai oleh sebagian besar peserta didik di kelas sehingga bisa dilakukan dengan cara melengkapi dan mengerjakan kembali tugas yang belum tuntas atau nilai yang masih kurang.

Pengayaan

Diberikan soal HOTS 1. sebagai berikut :

PT Hinomaru menerapkan sistem yang unik dalam memberikan tunjangan kepada karyawannya. Di perusahaan ini, setiap bulannya seorang karyawan akan mendapatkan dua macam tunjangan yaitu tunjangan keluarga dan tunjangan kesehatan. Besarnya tunjangan keluarga ditentukan dari $\frac{1}{5}$ gaji pokok ditambah Rp 50.000,00. Sementara besarnya tunjangan kesehatan adalah setengah dari tunjangan keluarga. Berdasarkan situasi tersebut, buatlah sebuah model matematika yang menyatakan hubungan besarnya tunjangan kesehatan dan gaji karyawan tersebut! Berapakah besarnya tunjangan kesehatan seorang karyawan yang memiliki gaji pokok Rp 2.000.000,00?

(Petunjuk: Nyatakan besarnya tunjangan keluarga dan kesehatan sebagai fungsi dalam variabel tertentu)

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui:

$$\text{Tunjangan keluarga} = \frac{1}{5} \text{ gaji pokok} + 50.000$$

$$\text{Tunjangan kesehatan} = \frac{1}{2} \text{ tunjangan keluarga}$$

Ditanya:

- Model matematika terkait besarnya tunjangan kesehatan dan gaji pokok karyawan?
- Besarnya tunjangan kesehatan jika gaji pokok = 2.000.000?

Di Jawab:

- Misalkan besarnya gaji pokok = x

$$\text{Tunjangan keluarga} = y$$

$$\text{Tunjangan kesehatan} = z$$

$$y(x) = \frac{1}{5}x + 50000$$

$$z(y) = \frac{1}{2}y$$

Besarnya tunjangan kesehatan terhadap gaji pokok dapat dituliskan sebagai komposisi dari

$$(z \circ y)(x) = z(y(x))$$

$$(z \circ y)(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}x + 50000 \right)$$

$$(z \circ y)(x) = \frac{1}{10}x + 25000$$

- Besarnya tunjangan kesehatan untuk seorang karyawan dengan gaji pokok 2.000.000 adalah

$$(z \circ y)(2.000.000) = \frac{1}{10}(2.000.000) + 25.000$$

$$(z \circ y)(2.000.000) = 200.000 + 25.000$$

$$(z \circ y)(2.000.000) = 225.000$$

Jadi, karyawan tersebut mendapat tunjangan kesehatan sebesar Rp 225.000,00.



Diberikan soal HOTS 2. sebagai berikut

Di CV. Sinkotan seorang pekerja mendapatkan bonus bulanan yang besarnya dirumuskan sebagai fungsi dari gaji pokok di mana besarnya bonus tersebut adalah setengah gaji pokok ditambah Rp 30.000,00.

Berdasarkan situasi tersebut buatlah sebuah model matematika yang menyatakan besarnya gaji pokok seorang pekerja jika diketahui besar bonus yang diterimanya! Berapakah gaji pokok seorang pekerja yang menerima bonus bulanan sebesar Rp 530.000,00?

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui:

$$\text{Bonus} = \frac{1}{2} \text{ gaji pokok} + 30.000$$

Ditanya:

- Model matematika untuk besarnya gaji pokok?
- Besarnya gaji pokok jika diketahui bonus yang diterima sebesar 530.000?

DiJawab

- Misalkan besarnya gaji pokok = y dan besarnya bonus = x , maka

$$y = \frac{1}{2}x + 30000$$

Mencari fungsi bonus dalam gaji pokok sama saja dengan mencari invers untuk variabel y .
Gunakan cara aljabar untuk menentukan y^{-1} .

$$y = \frac{1}{2}x + 30000$$

$$y - 30000 = \frac{1}{2}x$$

$$2y - 60000 = x$$

Jadi

$$y^{-1} = 2x - 60000$$

- Besarnya gaji pokok seseorang dengan bonus bulanan 530000 adalah

$$x = 2y - 60.000$$

$$x = 2 \cdot 530000 - 60000$$

$$x = 1060000 - 60000$$

$$x = 1000000$$

Jadi, gaji pokok karyawan tersebut adalah Rp 1.000.000,00.

ASESMEN PENGETAHUAN TERTULIS

- Tentukan invers dari fungsi berikut!

- $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

- $g(x) = 2x + 5$

- $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

- $p(x) = \sqrt[3]{x+2}$

- $q(x) = x^2 - 2x + 5$

- Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain besar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, dimana x banyak potong kain yang terjual.

- Jika suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?

- Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 dapatkah pedagang kain tersebut menyiapkan potong kain yang harus dijual?



Pedoman Penskoran

No	Alternatif Penyelesaian	Skor
1	<p>Ditanyakan :</p> <p>a. $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$</p> <p>b. $g(x) = 2x^2 + 5$</p> <p>c. $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$</p> <p>d. $p(x) = \sqrt[3]{x+2}$</p> <p>e. $q(x) = x^2 - 2x + 5$</p> <p>Dijawab :</p> <p>a. $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ Misal $f(x) = y$ $y = 3x - \frac{1}{2}$ $3x = y + \frac{1}{2}$ $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}$ Jadi $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$</p> <p>b. $g(x) = 2x + 5$ Misal $g(x) = y$ $y = 2x + 5$ $2x = y - 5$ $x = \frac{y-5}{2}$ Jadi $g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$</p> <p>c. $h(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ Misal $h(x) = y$ $y = \frac{2x-1}{x+3}$ $y(x+3) = 2x-1$ $yx+3y = 2x-1$ $yx-2x = -3y-1$ $x(y-2) = -3y-1$ $x = \frac{-3y-1}{y-2}$ Jadi $h^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{x-2}$</p> <p>d. $p(x) = \sqrt[3]{x+2}$</p>	<p>10</p> <p>10</p> <p>10</p>



No	Alternatif Penyelesaian	Skor
	Misal $p(x) = y$ $y = \sqrt[3]{x + 2}$ $y^3 = x + 2$ $x = y^3 - 2$	10
Jumlah		50
2	Diketahui : $f(x) = 500x + 1000$ Ditanya : a. Jika $f(50)$ b. Jika $f(x) = 100.000$, maka nilai $x = \dots$ Dijawab : a. $f(50) = 500(50) + 1000$ $= 25000 + 1000$ $= 26000$ b. $f(x) = 500x + 1000$ Misal $f(x) = y$ $y = 500x + 1000$ $500x = y - 1000$ $x = \frac{y - 1000}{500}$ Sehingga $f^{-1}(x) = \frac{x - 1000}{500}$ Maka banyaknya potong kain yang harus dijual adalah $= \frac{100.000 - 1000}{500} = \frac{99.000}{500} = 198$ buah	20
		20
		10
Jumlah		50
TOTAL		100

F. Glosarium

Fungsi komposisi adalah penggabungan operasi dua jenis fungsi sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru

Fungsi invers adalah suatu fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya

Pengayaan Suatu kegiatan pembelajaran yang ditujukan untuk siswa yang memiliki kecepatan belajar tinggi agar mereka dapat memanfaatkan waktu belajarnya untuk memperdalam dan memperluas materi yang mereka pelajari

Remedial Suatu kegiatan yang direncanakan dan dilakukan untuk memperbaiki hasil belajar bagi siswa yang mengalami kesulitan belajar.



G. Daftar Pustaka

1. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. 2017. Buku Siswa Matematika SMA/MA/SMK/MAK kelas X .Jakarta : Pusat kurikulum dan perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
2. Wirodikromo, Sartono. 2007. Matematika untuk SMA kelas XI Program Ilmu Alam. Erlangga, Jakarta.
3. http://sipfromptk.blogspot.com/2017/12/download-materi-dan-lks-matematika-sma_41.html diakses pada hari Rabu, 12 September 2018
4. https://drive.google.com/drive/folders/1jkFWmYYz-CgOw1ifrHc7nJ7oVkB_DF3E diakses pada hari Kamis, 13 September 2018