

MODUL AJAR MATEMATIKA

FUNGSI INVERS

Informasi Umum

Identitas Sekolah

Nama Penyusun	: Raingyusywaeko, M. Pd dan Orthio Rizki Pratama, S.Pd.
Institusi	: SMA Al Hikmah Boarding School Batu
Tahun Penyusunan	: 2022
Jenjang	: SMA
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 2 x 45 menit

Kompetensi Awal

1. Pemahaman siswa terkait pengertian fungsi, komposisi fungsi dan fungsi invers.
2. Keterampilan siswa untuk mengamati, merencanakan dan melakukan penyelidikan; memproses, menganalisis data dan informasi, mengevaluasi dan refleksi; serta mengomunikasikan hasil tentunya dapat mempermudah siswa untuk melaksanakan pembelajaran ini.

Profil Pelajar Pancasila

1. Kemandirian dalam menyelesaikan tugas
2. Kemampuan Bernalar Kritis dalam menemukan konsep bilangan berpangkat
3. Kreativitas dalam menyelesaikan permasalahan bilangan berpangkat

Sarana dan Prasarana

1. Komputer/ Laptop
2. Jaringan Internet
3. LCD Proyektor
4. Spidol
5. Papan Tulis
6. Pointer
7. alhikmah.elearning.sekolahku.id
8. alhikmah.lms.sekolahku.id
9. Buku Matematika SMA/SMK Kelas XI Kurikulum Merdeka

Target Peserta Didik

Pemetaan Kebutuhan Belajar Berdasarkan Profil Belajar Siswa

Tabel Hasil Asesmen Diagnostik non Kognitif untuk memetakan Kebutuhan Belajar Berdasarkan Profil Belajar Siswa

Profil Belajar Siswa	Visual	Auditori	Kinestetik
Nama Siswa	Saddad Amir Kelana Attar Akmal Bagas Dhalif Fahmi Farrel Adam Edgar Mirza Alfarees Daffa Faizul Haekal Kayyis Nusantara Rafid Abii Rivan	-	Dhafin Adam Irfan Akbar Husain Dhany Abil Fatih Hilmi
Produk	Siswa dibebaskan untuk mengkreasikan hasil pengamatan dan analisis pada berbagai media pelaporan seperti laporan tertulis, power point, video, poster, dll sesuai dengan bakat dan minat siswa		
Proses	Guru menyajikan penjelasan dalam bentuk modul dan bahan ajar artikel informatif	Guru memberikan apersepsi berupa video, mengajak siswa untuk melakukan diskusi	Guru memberikan kesempatan bagi siswa untuk melakukan percobaan analisis sederhana



Model Pembelajaran yang Digunakan

Model pembelajaran Problem Based Learning

Kompetensi Inti

Tujuan Pembelajaran

Elemen	Tujuan Pembelajaran	Indikator Keberhasilan	Asesmen
Aljabar dan Fungsi Materi: Fungsi Invers Keterampilan Proses Mengamati; merencanakan dan melakukan penyelidikan; memproses, menganalisis data dan informasi, mengevaluasi dan refleksi; serta mengomunikasikan hasil.	Melalui kegiatan diskusi, peserta didik mampu bernalar kritis menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi invers dan menggunakan fungsi invers untuk menyelesaikan masalah	Peserta didik mampu : 1. Menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi invers 2. Menggunakan fungsi invers untuk menyelesaikan masalah	Soal pemahaman tentang fungsi invers Rubrik keterampilan proses siswa 1. Mengamati 2. Merencanakan dan melakukan penyelidikan; 3. Memproses, menganalisis data dan informasi, mengevaluasi dan refleksi; 4. Mengkomunikasikan hasil

Pemahaman Bermakna

Setiap dari kalian pasti pernah ke Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum (SPBU). Kalian pasti paham bahwa biaya yang dibayar untuk pembelian bahan bakar kendaraan bergantung pada jenis bahan bakar dan volumenya.



Gambar 1.1 Pembacaan Volume Bensin dan Harga yang Harus Dibayar

Sumber: liputan6.com/Faizal Fanani (2018)

Atau bisa dilihat di link <https://www.youtube.com/watch?v=svAHEHT2s30>

Bagaimana hubungan antara volume bahan bakar yang dibeli dan biaya yang dikeluarkan? Apakah penambahan volume bahan bakar berbanding lurus dengan biaya? Dapatkah relasi antara biaya dengan volume bahan bakar dituliskan sebagai $B = f(V)$? V menyatakan volume bahan bakar yang dibeli dan B merupakan biaya yang dibayar.

Grafik di bawah menunjukkan hubungan jarak tempuh suatu kendaraan terhadap penggunaan bahan bakar. Apakah penambahan penggunaan volume bahan bakar berbanding lurus dengan jarak tempuh kendaraan? Bagaimana menuliskan relasi antara keduanya?



Gambar 1.2 Grafik Jarak Tempuh terhadap Volume Bahan Bakar

Pertanyaan Pemantik

1. Dapatkah kalian menyatakan semua volume bahan bakar yang dapat ditampung sebuah kendaraan sebagai suatu himpunan?
2. Dapatkah kalian menyatakan semua jarak maksimal yang dapat ditempuh untuk setiap volume bahan bakar sebagai suatu himpunan?
3. Apakah setiap relasi merupakan fungsi?

4. Apa peran domain, kodomain, dan range dari sebuah fungsi?
5. Bagaimana menerapkan operasi dan komposisi fungsi untuk memodelkan suatu keadaan atau masalah?
6. Kapan fungsi invers dapat diperoleh?
7. Bagaimana menggunakan fungsi invers untuk memodelkan suatu keadaan atau masalah?

Persiapan Pembelajaran

1. Guru membuat dan mengupload LKPD dalam elearning
2. Guru menjadwalkan pembelajaran dalam LMS
3. Guru menyiapkan jaringan internet, laptop dan LCD
4. Guru melakukan persiapan asesmen diagnostik non kognitif dan diagnostik kognitif
5. Peserta didik menyiapkan laptop dan alat tulis

Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan
<p>Pendahuluan (5 menit)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Guru memulai dengan kegiatan rutin membuka kelas (salam, berdoa, presensi, dsb) dan memberikan pesan-pesan motivasi. • Siswa secara aktif membantu guru untuk membacakan tujuan pembelajaran yang ingin dicapai “menjelaskan syarat dan aturan pembuatan fungsi invers dan menggunakan fungsi invers untuk menyelesaikan masalah” • Siswa dan guru mengutarakan kembali kesepakatan kelas <ol style="list-style-type: none"> 1. Menghargai pendapat orang lain dengan tidak menyela dan selalui mengapresiasi 2. Selalu menggunakan kata-kata positif 3. Aktif dalam belajar 4. Mengangkat tangan sebelum menyampaikan ide, gagasan, atau interupsi 5. Mengumpulkan tugas tepat waktu 6. Dll <p>Orientasi</p> <ul style="list-style-type: none"> • Guru mengarahkan siswa untuk membuka modul Apersepsi sebagai langkah awal mengenalkan konsep invers dari suatu fungsi, dan menjawab pertanyaan-pertanyaan yang ada di modul Apersepsi
<p>Kegiatan Inti (45 menit)</p>	<p>Mengorganisasi Siswa untuk Belajar</p> <ul style="list-style-type: none"> • Guru mengarahkan siswa untuk mengamati jenis-jenis fungsi

Kegiatan	Deskripsi Kegiatan
	<ul style="list-style-type: none"> • Guru mengarahkan siswa untuk membentuk kelompok yang terdiri dari 3 orang • Siswa diarahkan untuk menjawab pertanyaan yaitu menjelaskan definisi fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif. <p>Membimbing Penyelidikan</p> <ul style="list-style-type: none"> • Melalui LKPD, siswa menuliskan sendiri tujuan penyelidikannya berdasarkan permasalahan yang ia peroleh • Melalui panduan LKPD, siswa memilih bahan belajarnya sendiri dan menentukan cara penyelidikannya sendiri • Guru memberikan kebebasan kepada siswa untuk mencari referensi apapun (internet, modul, dll) selama proses penyelidikan <p>Menyajikan Hasil Penyelidikan</p> <ul style="list-style-type: none"> • Melalui panduan LKPD, siswa mendiskusikan temuannya dan menyusun laporan dengan media yang dipilih sendiri. Siswa bisa menyajikan temuan dalam bentuk laporan tertulis, power point, video, poster, dll sesuai dengan bakat dan minat siswa • Masing-masing perwakilan siswa mempresentasikan hasil temuannya secara windows shopping atau kunjung karya. Kelompok lain aktif dalam windows shopping atau kunjung karya, dan memberikan tanggapan melalui tulisan dalam sticky note.
<p>Penutup (10 menit)</p>	<p>Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah</p> <ul style="list-style-type: none"> • Siswa menuliskan hal yang telah mereka pelajari pada LKPD-nya masing-masing • Guru menutup pembelajaran sesuai dengan prosedur rutin (salam, terimakasih, doa, dsb)

Remedial	Pengayaan
<p>Guru dapat menyesuaikan kegiatan remedial dengan kebutuhan belajar siswa</p>	<p>Guru menyediakan permasalahan yang mengaitkan dengan materi setelahnya</p>

Asesmen

Asesmen Diagnostik

Informasi apa saja yang ingin digali? Dengan memberikan pertanyaan kunci melalui angket dan guru memberikan tindak lanjut

1. Mengetahui kesejahteraan psikologi dan sosial emosi anak.
Pertanyaan : Apa yang sedang kalian rasakan saat ini? (banyak masalah, marah, bahagia, sedih).
Tindak Lanjut : Identifikasi peserta didik dengan emosi negatif maka akan diajak berdiskusi empat mata.
2. Mengetahui aktivitas selama belajar di rumah.
Pertanyaan : Apa saja kegiatan kalian selama di rumah? (bangun pagi, bermain, belajar, begadang, membantu orang tua, travelling)
Tindak Lanjut : Mengomunikasikan dengan siswa serta orang tua/ wali murid bila diperlukan.
3. Mengetahui gaya belajar, karakter serta minat siswa.
Pertanyaan : Pembelajaran seperti apa yang kalian sukai? (pembelajaran langsung, pembelajaran kooperatif, pembelajaran di luar kelas)
Tindak Lanjut : Menyesuaikan pembelajaran dengan gaya belajar, karakter serta minat siswa.
4. Mengetahui kondisi fisik siswa
Pertanyaan : Bagaimana kondisi kalian saat ini? (sehat, sakit, kurang enak badan, pusing)
Tindak Lanjut : Mengomunikasikan dengan siswa serta orang tua/ wali murid bila diperlukan.

Asesmen Formatif

Asesmen formatif terdapat/ terlampir dalam lembar kerja peserta didik

Asesmen Sumatif

PENILAIAN HARIAN FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

Pilihan Ganda Kompleks (Benar Salah)

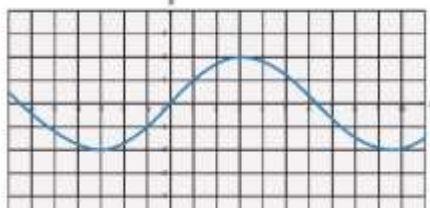
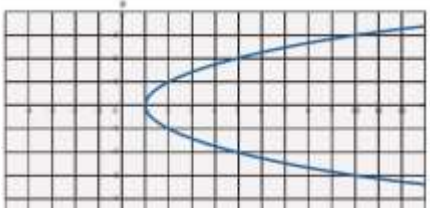
Tentukan pernyataan berikut ini bernilai BENAR atau SALAH.

1. Setiap RELASI merupakan FUNGSI
 - A. BENAR
 - B. SALAH

2. Setiap FUNGSI merupakan RELASI
 - A. BENAR
 - B. SALAH

Menjodohkan

3. Pasangkanlah agar menjadi BENAR.

Grafik			Pernyataan
	A	1	RELASI
	B	2	FUNGSI

Isian Singkat

4. Diketahui fungsi-fungsi berikut ini:

$$f = \{(2,4), (3,7), (5,13), (7,19)\}$$

$$g = \{(5,20), (7,28), (13,52)\}$$

$$h = \{(20, -15), (28, -23), (52, -47)\}$$

$$\text{Hasil dari } (h \circ g \circ f)(5) = \dots \text{ (-47)}$$

5. Diketahui $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan $g(x) = 3x + 5$. Fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = \dots$
- $3x^2 - 4x + 5$
 - $3x^2 - 12x + 7$
 - $3x^2 - 12x + 11$
 - $9x^2 + 18x + 7$
 - $9x^2 + 26x + 7$
6. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas jadi. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 2x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = x^2 - 3x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Fungsi yang menyatakan jumlah kertas yang dihasilkan oleh produksi tersebut adalah
- $2x^2 - 6x - 7$
 - $2x^2 - 6x - 1$
 - $4x^2 - 10x + 4$
 - $4x^2 - 10x + 3$
 - $4x^2 - 10x + 7$

Isian Singkat

7. Diketahui $f(x) = 2 - x$ dan $g(x) = 2x + a + 1$. Jika $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, maka nilai $a = \dots$. (-2)
8. Jika $g(x - 2) = 2x - 3$ dan $(f \circ g)(x - 2) = 4x^2 - 8x + 3$, maka nilai dari $f(-3) = \dots$
- 0
 - 1
 - 3
 - 5
 - 7
9. Diketahui fungsi $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$. Invers fungsi g adalah $g^{-1}(x) = \dots$
- $\frac{-3x-1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
 - $\frac{3x-1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$
 - $\frac{3x-1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
 - $\frac{3x+1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

E. $\frac{-3x+1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$

10. Diketahui $f(x) = 4x + 2$ dan $g(x) = \frac{x-3}{x+1}, x \neq -1$. Invers dari $(g \circ f)(x) = \dots$.

A. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3x-1}{4x+1}, x \neq -1$

B. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{4x-1}{-3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$

C. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3x+4}{4x+4}, x \neq -1$

D. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4-4x}, x \neq 1$

E. $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{4x+1}{3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$

11. Penghasilan per bulan seorang karyawan terdiri atas gaji pokok dan bonus penjualan. Gaji pokok karyawan tersebut adalah Rp4.500.000,00. Bonus penjualannya sebesar $g(x) = 5.000x$ rupiah dengan x menyatakan banyaknya unit barang yang laku dijual olehnya selama sebulan. Jika $f(x)$ menyatakan penghasilan total karyawan tersebut, rumus invers f adalah

A. $f^{-1}(x) = 900 - \frac{1}{5000}x$

B. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5000}x - 900$

C. $f^{-1}(x) = \frac{1}{900}x + 5000$

D. $f^{-1}(x) = \frac{1}{900}x - 5000$

E. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5000}x + 900$

Essay

12. Diketahui $f(x) = \frac{ax+1}{3x-1}, g(x) = x - 2$, dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = \frac{7}{2}$. Nilai $a = \dots$. (4)

Lampiran

Lembar Kerja Peserta Didik

Apersepsi

Kalian pasti sering menemukan bahasa Inggris dalam kehidupan sehari-hari, baik lewat film, berita, cerita ataupun lagu. Kalian memahami artinya dengan menerjemahkan ke dalam bahasa Indonesia.



Berdasarkan Gambar di atas, dapat diamati bahwa dengan membalikkan arah panah, untuk setiap mata pelajaran dalam bahasa Indonesia (keluaran), kalian bisa mencari kata yang mempunyai arti yang sama dalam bahasa Inggris (masukan). Prosedur ini membentuk suatu relasi kebalikan (invers) antara anggota-anggota keluaran dan masukan. Apakah relasi kebalikan ini berlaku juga pada fungsi? Apakah relasi kebalikan membentuk sebuah fungsi yang dikenal dengan fungsi invers? Pertanyaan ini akan bisa kalian jawab dengan memahami terlebih dahulu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif.

1. Dapatkah kalian menerjemahkan nama mata pelajaran (sebaliknya) dari bahasa Indonesia ke dalam dalam bahasa Inggris?

.....

.....

.....

2. Apakah proses kebalikan dapat kalian terapkan juga untuk semua relasi?

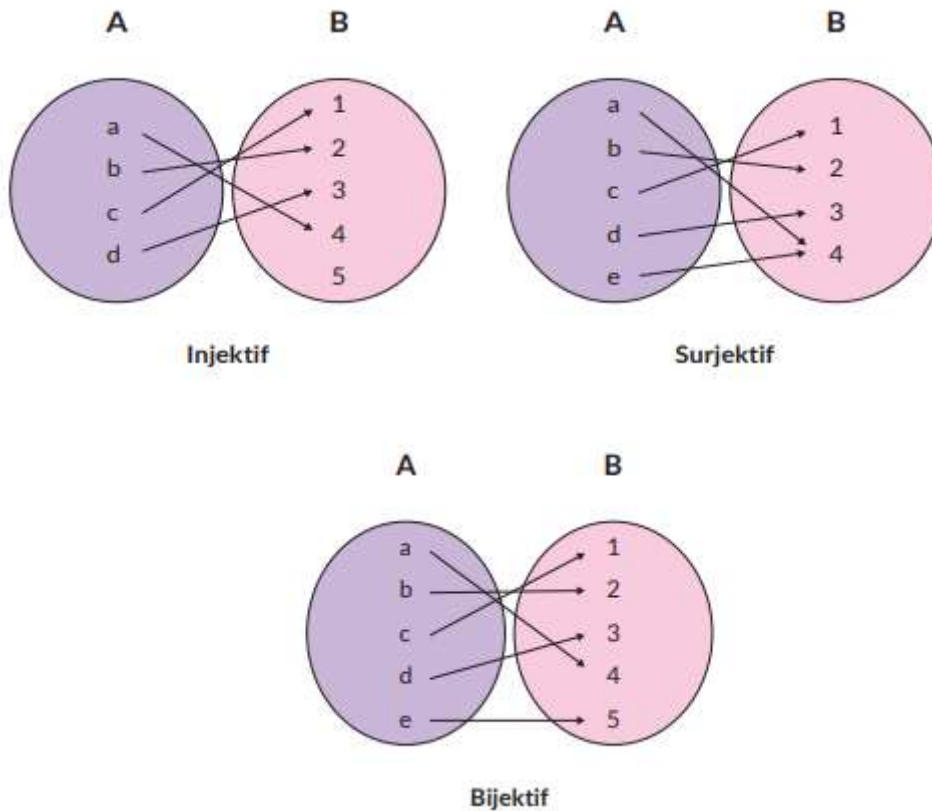
.....

.....

.....



Berdasarkan jenis relasinya, fungsi dibagi menjadi tiga jenis yaitu Injektif, Surjektif, dan Bijektif. Amatilah dengan seksama ilustrasi fungsi berikut:



Jelaskan pengertian fungsi-fungsi berikut ini menggunakan kalimat kalian sendiri.

1. Fungsi Injektif adalah

.....

2. Fungsi Surjektif adalah

.....

3. Fungsi Bijektif adalah

.....

Eksplorasi Diri 1

Perhatikan tabel harga baju kaos di bawah ini.

Jumlah Baju Kaos (Masukan)	Harga Baju Kaos (Keluaran)
1	55.000
3	165.000
5	275.000
10	550.000

1. Buatlah tabel dengan membalikkan keluaran menjadi masukan dan masukan menjadi keluaran.

.....

2. Buatlah grafik jumlah baju kaos terhadap harga baju kaos dan grafik harga baju kaos terhadap jumlah baju kaos. Jelaskan hasil yang kamu peroleh.

.....

3. Tentukan domain dan range dari kedua grafik yang dihasilkan di nomor (2).

.....

4. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi asal.

.....

5. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya.

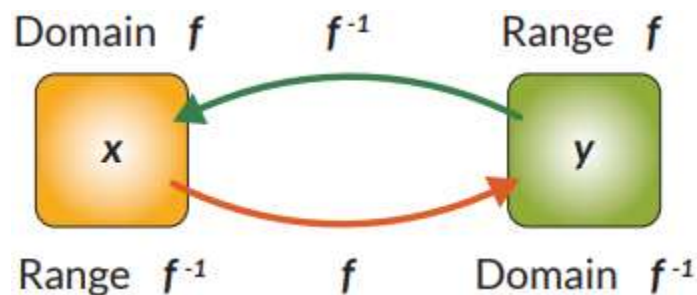
.....



Syarat Fungsi Memiliki Invers

Fungsi yang berkebalikan operasinya dari fungsi asalnya disebut sebagai fungsi invers. Fungsi ini memetakan anggota yang ada di range fungsi asal ke anggota yang ada di domain fungsi asal. Fungsi invers dituliskan sebagai f^{-1} . Kalian perhatikan bahwa -1 di sini bukan merupakan suatu pangkat.

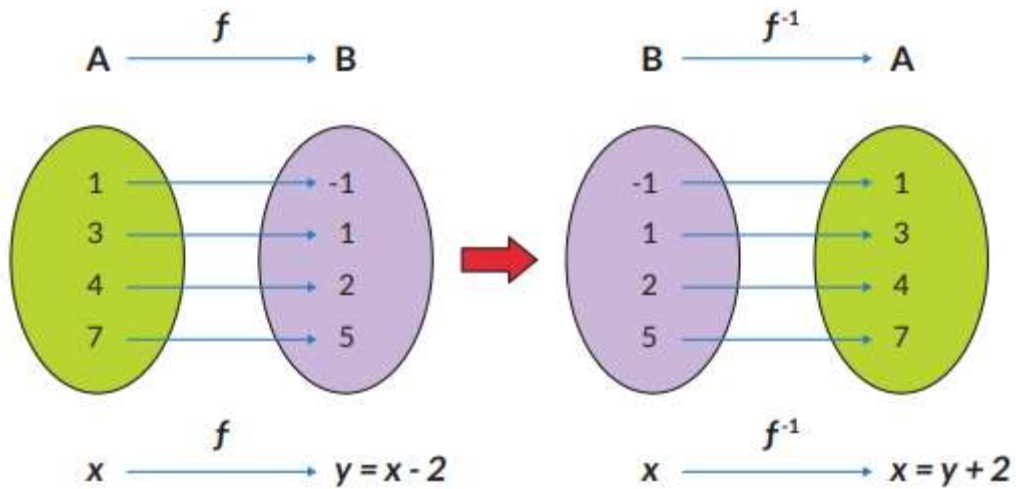
Dari definisi fungsi invers yang baru dijelaskan sebelumnya, hubungan antara domain dan range dari fungsi asal dan fungsi invers dapat dipahami melalui diagram panah berikut.



Secara konsep, menentukan fungsi invers dari fungsi asal dengan diagram panah memang lebih intuitif; dengan membalik arah panah. Namun, sering kali dijumpai bahwa fungsi asal dituliskan dalam bentuk persamaan matematis. Dalam kasus ini, cara untuk menemukan persamaan fungsi invers dari fungsi asal dapat dilakukan dengan cara berikut:

1. Ubah $y = f(x)$ menjadi bentuk $x = f(y)$
2. Ubah persamaan $x = f(y)$ menjadi bentuk $y = \dots$.
3. Ubahlah variabel y dengan $f^{-1}(x)$ sehingga diperoleh rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$

Perhatikan gambar yang menunjukkan fungsi dan fungsi invers-nya. Gunakan langkah-langkah di atas untuk menemukan fungsi invers dari f .



Eksplorasi Diri 2

Sebuah mobil melaju di jalan raya. Kecepatan tiap menit diukur dan dicatat dalam tabel di bawah ini:

Waktu (menit)(x)	Kecepatan Mobil (m/menit)(y)
1	100
2	180
3	193
4	185
5	180
6	165
7	175
8	186
9	190
10	166

1. Apakah data waktu dan kecepatan membentuk relasi? Jika ya, apakah relasi itu adalah fungsi?

.....

2. Plot data dengan sumbu x adalah waktu dan sumbu sumbu y adalah kecepatan.

.....

3. Sekarang, kalian tentukan invers relasi dari pertanyaan 1.

.....

4. Dari definisi fungsi yang kalian pelajari, apakah invers relasi pada pertanyaan (3) adalah fungsi? Jelaskan alasanmu.

.....

5. Apabila pada menit ke-5 kecepatan diubah menjadi 182 m/menit, apakah relasi antara waktu dan kecepatan merupakan relasi surjektif dan injektif?

.....

6. Dengan perubahan ini, apakah invers relasi adalah fungsi? Jika ya, apakah fungsi injektif dan surjektif (bijektif)?

.....

Rubrik Penilaian LKPD

Penilaian	Rubrik	Skor
<p>Langkah Kerja (keterampilan proses merencanakan dan melakukan penyelidikan)</p>	<p>Siswa dapat menuliskan langkah kerja penyelidikan</p> <ul style="list-style-type: none"> • Melengkapi kegiatan Ayo Mencoba • Melengkapi kegiatan Ayo Menalar 	50
<p>Data (keterampilan proses siswa mengamati)</p>	<p>Siswa dapat menuliskan data hasil pengamatan</p> <ul style="list-style-type: none"> • Melengkapi kegiatan Ayo Mengamati 	25
<p>Simpulan (keterampilan siswa menyimpulkan konsep)</p>	<p>Siswa dapat menyimpulkan konsep yang diperoleh berdasarkan permasalahan yang disajikan</p> <ul style="list-style-type: none"> • Melengkapi kegiatan Ayo Menyimpulkan <p><i>Merefleksi dan mengevaluasi pemikirannya sendiri: Menjelaskan asumsi yang digunakan, menyadari kecenderungan dan konsekuensi bias pada pemikirannya, serta berusaha mempertimbangkan perspektif yang berbeda.</i></p>	25

Rubrik Penilaian Keterampilan Siswa Berdiskusi (mengomunikasikan hasil)

No.	Kriteria	Skor
1.	<p>Siswa mengajukan pertanyaan</p> <p><i>Mengajukan pertanyaan: Mengajukan pertanyaan untuk klarifikasi dan interpretasi informasi, serta mencari tahu penyebab dan konsekuensi dari informasi tersebut.</i></p>	1
2.	<p>Siswa menyampaikan jawaban</p>	1
3.	<p>Siswa menyampaikan tanggapan</p>	1

Bahan Bacaan Guru

Dicky Susanto, dkk. (2021) *Matematika SMA/SMK Kelas X*. Jakarta : Pusurbuk Kemendikbudristek.

Michael Danos and Johann Rafelski. (1984). *Pocketbook of Mathematical Functions Abridged Edition of Handbook of Mathematical Functions*. Frankfurt.

Glosarium

Fungsi, Invers, Fungsi Invers

Daftar Pustaka

Dicky Susanto, dkk. (2021) *Matematika SMA/SMK Kelas X*. Jakarta : Pusurbuk Kemendikbudristek.

Michael Danos and Johann Rafelski. (1984). *Pocketbook of Mathematical Functions Abridged Edition of Handbook of Mathematical Functions*. Frankfurt.